令和６年度　一般選抜　１期　【２日目】
数学 I・数学 A 解答例

$\boxed{1}$

(1) 10　　(2) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$　　(3) 45°　　(4) $\dfrac{7}{36}$

$\boxed{2}$

(1) $a = 4$　　(2) ① 10 通り　② 20 通り

(3) ① $|x| > 1$ または $|y| > 1$ ならば，$x^2 + y^2 > 1$ である。

② $|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ ならば，$x^2 + y^2 \leqq 1$ である。 偽

$\boxed{3}$

(1) 放物線の式を標準形に直すと

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (6a+2)x + 3a + 4 = \{x + (3a+1)\}^2 - (3a+1)^2 + 3a + 4 \\ &= \{x + (3a+1)\}^2 - 9a^2 - 3a + 3 \end{aligned}$$

よって，頂点の座標は $\underline{\mathrm{P}(-3a-1, -9a^2-3a+3)}$ である。

また，放物線が x 軸と異なる 2 点で交わるのは， P の y 座標が負の時に限る。

よって，$-9a^2 - 3a + 3 < 0$ となり，整理して $3a^2 + a - 1 > 0$ 解くと

$$a < \frac{-1-\sqrt{13}}{6},\ a > \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

$a > 0$ であるから，求める a の範囲は，$\underline{a > \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}}$

(2) まず，A，B の x 座標を求め，AB の長さを求める。

方程式 $x^2 + (6a+2)x + 3a + 4 = 0$ を解くと，解は，$x = -3a - 1 \pm \sqrt{9a^2 + 3a - 3}$

よって，AB$= 2\sqrt{9a^2 + 3a - 3}$ である。

したがって，点 P から AB に降ろした垂線の足を H とするとき，AH$=\sqrt{9a^2 + 3a - 3}$ となる。

次に， PH$= 9a^2 + 3a - 3$ となるので，△ ABP が正三角形のときは

$$\mathrm{AH} : \mathrm{PH} = \sqrt{9a^2+3a-3} : (9a^2+3a-3) = 1 : \sqrt{3}$$　が成り立つ。

ゆえに，$9a^2 + 3a - 3 = \sqrt{3}\sqrt{9a^2 + 3a - 3}$ となり，両辺を 2 乗して

$$(9a^2+3a-3)^2 = 3(9a^2+3a-3) \quad をえる。$$

$9a^2+3a-3 = X$ とおくと，$X^2 = 3X$ となり，これを解くと $X = 0, 3$ 。

$X = 0$ は，P の y 座標が 0 となり適さない。$X = 3$ のとき，$9a^2+3a-3 = 3$ を解く。

整理して，$3a^2+a-2 = (3a-2)(a+1) = 0$ 　よって，$a = -1, \dfrac{2}{3}$

$a > 0$ より，求める a の値は，$\underline{a = \dfrac{2}{3}}$ である。

$\boxed{4}$

(1) 三角形 ABC に余弦定理を適用して

$$\cos C = \frac{10^2+10^2-(4\sqrt{5})^2}{2\cdot 10\cdot 10} = \frac{120}{200} = \underline{\frac{3}{5}}$$

また，$\mathrm{CD} = 10\cdot\dfrac{3}{5} = 6$ である。よって，三角形 ACD に余弦定理を適用して

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AC}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}\cos C = 10^2+6^2-2\cdot 10\cdot 6\cdot\frac{3}{5} = 100+36-72 = 64$$

したがって，$\underline{\mathrm{AD}= 8}$

(2) $\sin C > 0$ より，$\sin C = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \underline{\dfrac{4}{5}}$

よって，正弦定理より

$$R = \frac{\mathrm{AD}}{2\sin C} = \frac{8\cdot 5}{2\cdot 4} = \underline{5}$$

(3) (2) により，円の直径は 10 である。よって，AC は直径なので，$\angle\mathrm{AEC}$ は直角である。

したがって，三角形 ABC は二等辺三角形であるので，$\mathrm{AE} = \mathrm{BE}$ となる。

ゆえに，$\mathrm{BE} = \underline{2\sqrt{5}}$

また，三平方の定理より $\mathrm{CE}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AE}^2 = 10^2 - (2\sqrt{5})^2 = 80$ となる。

よって，$\mathrm{CE}= \sqrt{80} = \underline{4\sqrt{5}}$

$\boxed{5}$

(1) $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=3$ より $x_1+x_2+x_3=9$

同様に $y_1+y_2+y_3=15$

(2) 与えられた関係を代入すると

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3) &= (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) \\ &\quad +(x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2) \\ &= x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \\ &= 9\cdot 15 \\ &= 135\end{aligned}$$

となるから，$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ の値は 135 となる。

(3) 共分散 C_{xy} は

$$\begin{aligned}C_{xy} &= \frac{1}{3}\Big((x_1-3)(y_1-5)+(x_2-3)(y_2-5)+(x_3-3)(y_3-5)\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big((x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)-5(x_1+x_2+x_3)-3(y_1+y_2+y_3)+3\cdot 15\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(135-5\cdot 9-3\cdot 15+45\Big) \\ &= 30\end{aligned}$$

従って，相関係数 r_{xy} は

$$\begin{aligned}r_{xy} &= \frac{30}{\sqrt{9}\sqrt{125}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

令和6年度　一般選抜　1期　【2日目】

数学 I・数学 A・数学 II・数学 B 解答例

$\boxed{1}$

(1) 10　　(2) $\dfrac{7}{36}$　　(3) $x=\dfrac{2}{3}$　　(4) 24

$\boxed{2}$

(1) $x=\sqrt{7}$　　(2) ① 10 通り　② 20 通り

(3) ① l_1の傾き $=-2$, l_2の傾き $=3$　　② $\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{3}$

(1) 余弦定理より

$$\cos B=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{12}{60}=\underline{\frac{1}{5}}$$

また，$\sin B>0$ より

$$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{25}}=\underline{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

(2) 定数 $k>0$ をとって，AB=$5k$，BC=$6k$，AC=$7k$ とおくことができる。

このとき，$\triangle$ ABC の面積 S は，(1) より

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B=\frac{1}{2}5k\cdot 6k\frac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}\,k^2$$

よって，$6\sqrt{6}\,k^2=24\sqrt{6}$ が成り立つので，これを解いて，$k=2$ が分かる。

ゆえに，AC=$7\cdot 2=\underline{14}$ である。

さらに，正弦定理より

$$R=\frac{\mathrm{AC}}{2\sin B}=\frac{14\cdot 5}{2\cdot 2\sqrt{6}}=\frac{35}{2\sqrt{6}}=\underline{\frac{35\sqrt{6}}{12}}$$

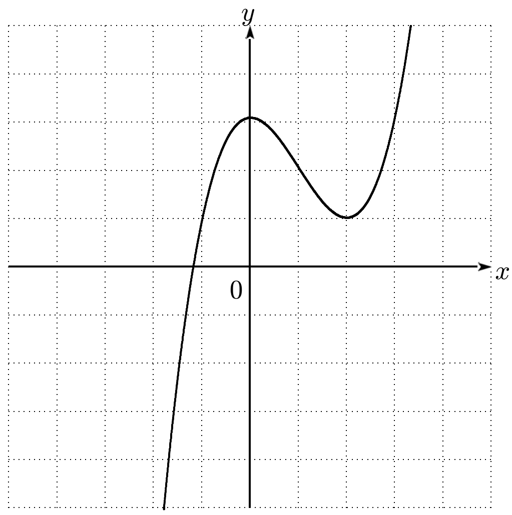
$\boxed{4}$

(1) $y' = \dfrac{3}{2}x^2 - 3x = \dfrac{3}{2}x(x-2)$。

したがって，$x = 0,\ 2$ のとき，$y' = 0$ となる。

増減表は次の様になる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$



よって，$\underline{x = 0 \text{ のとき，極大値 } y = 3,}$

$\underline{x = 2 \text{ のとき，極小値 } y = 1}$ をとる。

グラフは右図の様になる.

(2) $x = -1$ のとき $y = 1 > 0$，$x = -2$ のとき $y = -7 < 0$ となる。

よって，上の図より，関数 $y = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3$ のグラフと x 軸との共有点は，$x = -2$ と $x = -1$ の間にただ1つ存在する。

ゆえに，3次方程式 $\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3 = 0$ の実数解は，-2 と -1 の間にただ1つある。

(3) 上のグラフの平行移動を考えると，$1 < a < 3$ のとき，グラフと x 軸との共有点は，ちょうど3個ある。よって，$1 < a < 3$ のとき，3次方程式 の実数解は3個になる。

$\boxed{5}$

(1) 確率変数 N の確率分布は以下のようになる。

k	1	2
$P(N=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

N の期待値は $E(N) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{3}{2}$ であり，分散は $E(N^2) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 = \frac{5}{2}$ より $V(N) = E(N^2) - (E(N))^2 = \frac{5}{2} - (\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$ となる。

(2) X と Y とは互いに独立となるから

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

(3) 4 桁の数を $ABCD$ とする。この数を 3 進数とみて，10 進数で表記すると

$$\begin{aligned} Z &= A\cdot 3^3 + B\cdot 3^2 + C\cdot 3^1 + D\cdot 3^0 \\ &= 27A + 9B + 3C + D \end{aligned}$$

ここで，A, B, C, D は確率変数である。

Z の期待値は，$E(A) = E(B) = E(C) = E(D) = \dfrac{3}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(27A + 9B + 3C + D) \\ &= 27E(A) + 9E(B) + 3E(C) + E(D) \\ &= 60 \end{aligned}$$