数学ソフトウェアを用いた数学教材の有効性について

林　　雄一郎
北海道情報大学

On Effectiveness of Math Teaching Materials Using Mathematics Software

Yuuichirou HAYASHI
Hokkaido Information University

平成25年３月

北海道情報大学紀要　第24巻　第２号別刷

〈研究ノート〉

数学ソフトウェアを用いた数学教材の有効性について

林　　雄　一　郎*

On Effectiveness of Math Teaching Materials Using Mathematics Software

Yuuichirou　HAYASHI

キー・ワード：数学ソフトウェア、教材開発、数学教材、数学科教授法、数学的活動

1　はじめに

論題にある“数学ソフトウェア”は、パーソナル・コンピュータ（以下PCと略記）と対話しながら数学の教材作成を支援するソフトウェア・システムとし、例えばNewton近似法で代数方程式の根を求めるコンピュータ・プログラムなどとは区別する。以下、数学ソフトウェアをMathソフトと略記する。

1980年代前半、PCは16ビットで演算スピードもかなり遅く記憶容量も少なかった。OSはMS-DOS、プログラミングにはBASIC言語がよく使われていた。

1989年の高校学習指導要領の改訂ではコンピュータの活用が積極的に謳われ、教育現場でPCが活用されるようになるが、BASIC言語や計算アルゴリズム、グラフィック命令などに関するプログラミング・リテラシーが必要[1]であり、限られた教授者だけが作成したり、既成のソフトやソースコードを作り変えて使ったりしていた。

90年代に入って、VLSI技術の進歩でダウンサイジングが進み、PCは16ビットDOSから32ビットWindowsへ進化するとともにWEB端末での利用が進む。

2000年代になると、64ビットPCが現れCPUのクロックも1GHzに達し、通信機能も向上した。グラフィック技術の進歩でグラフィカル・ユーザー・インターフェース（GUI）は向上し、それに伴って様々なMathソフトが開発され、それらの多機能化・高機能化も進み、教育現場で使用されるようになり今日に至っている。

本稿では、Mathソフトで開発された数学教材が学習者の数学に対する興味・関心や数学に対する理解力・思考力にどういう効果をもたらすかを考察する。

そのため、フリー・ウェアであるFUNCTION－VIEW、GRAPES、Cinderella、安価で入手できるCabriⅡPlus、Cabri3Dv2、TI-Nspire CX CAS、Excel、高度な数学的機能をもつMathematicaをMathソフトとして取り上げ、これらを用いて開発される中学校数学、

＊北海道情報大学情報メディア学部情報メディア学科教授

高校数学の教材例とその教育的有効性を考察している。２では、前述したMathソフトの特徴を述べ、設計思想の概略と活用について述べる。各ソフトにはその設計思想に見合った得意分野がありそれをどう教材開発に生かしていくかが重要になる。３では数学教材とMathソフトの関連について、４では数学的活動とPCの活用について、５では中学校数学の各単元における活用例を、６では、高校数学の各単元における活用例を考察する。７でMathソフトを用いた数学教材の有効性を、８では教材開発と活用上の課題を考察する。

2 Mathソフトの特徴と活用の可能性

各ソフトの特徴と設計思想・活用は以下の通りである。（ ）内は略記記号である。

（１）CabriⅡPlus[2]（CbⅡ）

フランス国立科学研究センターとJoseph Fourier大学の共同で開発された幾何ソフトで平面幾何の学習や探究のための多機能なツールを備えている。多くの作図ツールを用いると精密な作図が可能で、点を動かして自由自在に図形の変形ができるため、作図やその移動・変形の操作が容易であり、図形を動的に変化させられる。幾何図形や２次曲線を手軽に描けるのが便利である。

（２）Cabri3Dv2[3]（Cb3）

開発者は（１）と同じで、立体図形の作図ソフトである。作図した図形は自由に移動・回転・変形、アニメーションができるため様々な視点から見られる。視覚的に把握し辛い立体図形の学習に効果を発揮できる。

（３）Cinderella[4]（Cin）

1990年代前半、Henry Crapo、J.R.Gebertが着手し数々の変遷を経て開発され続けてきた対話型幾何学ソフトウェアで 、現在はU.Kortenkamp とJ.R.Gebertが代表者である。平面幾何や非ユークリッド幾何の図形が描けるほか、関数グラフを描く関数型プログラミング言語や力学系の物理シミュレーション機能をもつ強力な統合的ソフトウェアである。

（４）Excel（Ex）

Microsoft Office Excel関数は400近くの関数がある表計算ソフトウェアである。そのうち学校数学で有用な関数は三角関数、統計関数などであり表計算ツールとして有効に利用できる。特に、統計分野での活用効果が大きい。

（５）FUNCTION-VIEW[5]（Fv）

和田啓介の作成した関数グラフ・図形表示ソフトであり、２次元、３次元で関数教材を取り扱うのに便利な機能が豊富にあり操作も簡単である。平面図形、空間図形も扱える。教科書に出てくる関数（陽関数、陰関数、パラメータ表示）を手軽に描くのに都合がよい。

（６）GRAPES[6]（Gr）

友田勝久の作成したグラフ表現・実験システムであり、関数グラフ、図形表示ではFvと類似した機能を含め多くの機能が備わっている。手軽に関数や図形を描くことができるので関数教材、図形教材の作成に威力を発揮し、学校現場で広く使われている。

（７）Mathematica[7]（Mat）

Stephen Wolfram が開発した数式処理システム、プログラミング言語である。数学で用いられる多くの機能があり、高度な科学技術計算が対話型で行われる。グラフや図形の描画など２次元、３次元グラフィックス機能も備わっており、数学教育のみならず数学研究に威力を発揮している。Wolfram Demonstraions Project[(13)]にはフリーで使える興味深い教材データベースが用意されている。数学的活動における課題探究での活用が見込まれる。

（８）TI‐Nspire CX CAS[8]（TI）

Texas Instruments 社製のグラフ電卓である。同じ機能を PC 上でエミュレートができる TI-Nspire Student ソフトウェアが用意されており、電卓画面をプロジェクターで表示するのに便利である。数値計算、数式処理、グラフの描画、幾何図形の作図とデモンストレーション、統計処理など多彩な機能を持ち強力である。教室で広く活用することが見込まれる。

３　数学教材と Math ソフト

教材の価値は、それがいかに学習者の心をとらえ、興味・関心を喚起するか、またいかに学習内容の本質とその教授方法に合致しているかで決まる。PC 教材を考える場合、授業過程で PC はどんな役割を任されるか、どう学習者の学習意欲を高めるか、どう学習内容の理解や数学的思考を促進するか、どう表現力等の向上に資するか、がポイントとなる。

PC には、情報を記憶・演算・判断したり、リアルタイムで提示したりする能力があり、数学教育に活用される PC やグラフ電卓の能力には数式処理、数値処理、図形処理がある[9]が、さらに情報表現力、シミュレーション機能を追加できるであろう。これらは学習者が数学を学習する際に PC に分担させる技能的ツールと考えることができる。

また、その活用方法について寺田[9]は、①教材の導入時における動機付け、②操作実験的な方法による具体から理論化への体験学習、③定義や定理の内容の理解、④納得の数学の実行、をあげている。これらについての筆者の考えを述べる。

① は、学習者の興味・関心・意欲を喚起する教材の重要性である。TIMSS2011 調査の結果[10]によれば、中学２年生の 60.8%が「数学が好きか」に対してネガティブな反応だったが、これを好転させていく上でも重要である。身近な生活や社会生活の場面に見られる事象の PC 教材化や、動的な教材（動きのある教材）の工夫が求められている。

②は、抽象的な数学の内容を図・グラフ表現で具体的に例示し視覚的な情報提示で理解を深めさせたり、初めに予想を立て、PC を用いて試行錯誤しながらいろいろ探索し、予想の検証や自ら数学を作ったりする体験学習である。CG 機能の飛躍的な進歩で、動的な教材や事象のシミュレーション、正確なグラフのデモストレーションが対話型で実現できるようになり、PC 活用の体験学習は幅を広げた。

問題事象の視覚化は、視覚的直観力を活性化できるメリットがある。数学で普通に行われる演繹的推論は一次元的で、論理的に命題を積み上げていくいわゆる垂直思考である。図・表・グラフなどの二次元的、三次元的な視覚情報の知覚操作を伴う認知活動は直観的思考力や創造

力、いわゆる水平思考を活性化することができ、斬新な気付きやパターンの認識・発見を促すことが期待される。例えば、$a_n = 2a_{n-1} + 1$という漸化式から一般項a_nを求める問題を解いた後で、"Hanoiの塔"の円盤を移す操作を視覚体験した場合、操作の手数を確かめながら、各局面を漸化式と関連させて式の意味を理解すれば、数理パズルに潜む漸化式のからくりに気付き、そのよさが理解できるとともに、他への活用という意欲付けができるだろう。

③は、概念や命題の数学的イメージを把握させ理解させることが出来ることである。例えば、立体図形はイメージがなかなか掴みづらいが、３次元グラフィックスを用いて回転させれば、回転という動き・揺さぶりの中で立体図形に潜む原理・法則が理解される。ここに動的な教材の真価がある。

④は③とも関連するが、学習内容の直観的イメージの形成は納得できるための十分条件となるであろう。その直観的なイメージを基に仮説を立て、数学的な見方や考え方を用い、数学的知識を活用しながら事象を数学的な言葉で表現し、数学的処理を行い一定の結論を得て仮説を検証しもって原理・法則を組み立てていく過程にPC教材がどう関わるかである。

教材の表現というものは、それを用いて学ぶ際の思考の質に影響を与える。数学記号や数式だけでなく図・表・グラフなどその内容によって様々な表現が工夫されてきた。例えば、幾何学の学習では作図ソフトを用いれば正確な図を描くことができるし、点を自在に移動させて図形を変形させても幾何学的法則が不変であることがよく理解できる。これはフリーハンドの作図表現ではほとんど不可能である。

4　数学的活動とPCの活用

数学的活動は、既習の数学を基にして数や図形の性質、事象に潜む数理を見出す問題解決からなる探究的活動と身近な生活や社会生活で出会う事象への応用を目指す応用的活動、そしてそれらの問題解決の過程での言語活動からなる[11、12]。

探究的活動においては、課題（問題）探索の方法が重要である。普通は紙に書いたり、計算したり、模型を作ったり、実験したりするであろう。しかし、紙に書く図形は不正確であり、そのために見落としや思いがけない錯覚によるミスが起きる可能性があるであろう。これは幾何の問題を解く際によく経験することである。また、計算も煩雑になればミスをしたりあきらめたりするかもしれない。模型の製作も、例えば正20面体を作ることを考えれば明らかなように大変な作業を伴うし、実験となればなおさら煩雑となり大変である。

もしこれらの処理をPC上で行えるならば便利である。図形的な問題はMathソフトの作図ソフトを用いてできるし、データの処理なら表計算ソフトなどを使って統計処理できる。回帰直線を求めればデータ間の法則を見つけられる。また、その法則を用いてシミュレーションすれば実際の事象に当てはめた予測が可能となろう。探究活動へのPCソフトの活用は多くの効果をもたらす可能性を秘めている。

応用的な活動においては、応用的な課題を詳しく調べ既習の数学の何が使えるかを考えながら数式で表現することが手始めになる。そして、その数式を処理し何が分かるかを洞察する。

その際にMathソフトを使ってみることが考えられる。

例えば、2000円を持ってスーパーに２種類の食品Ａ，Ｂの買い物に行く。値段はそれぞれ150円、200円、カロリー量は100kcal、200kcalである。カロリー制限は全部で1600kcal以内として、できるだけ個数を多く買う場合を想定したとき、それぞれ何個ずつ買えばいいかという問題を考察する。買う食品の個数をＡはx個、Ｂはy個とおいて条件を数式化すると４つの不等式が作れる。　$150x+200y\leq 2000$、$100x+200y\leq 1600$、$x\geq 0$、$y\geq 0$

この問題では $x+y=a$ とおいてaが最大になる場合を考えればよいから線形計画法の考えを応用できる。この不等式の領域をMathソフトで正確に描くと図１のようになる。

$y=-x+a$のグラフを座標面に描き、aを動かしてy切片aの変化を観察する。すると、直線が領域を横切るとき、最大となるのは点$P(8,4)$を通るときであることが分かる。このデモストレーションが学習者の理解の重要なポイントになっている。こうして、食品Ａは８個、Ｂは４個であるときが解となる。

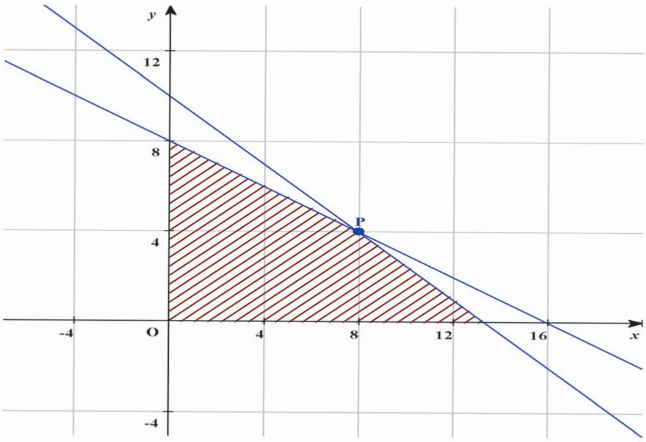

図１　線形計画法による解決

以上のように、数学的活動にMathソフトを有効に活用させ得ることが分かる。

5　中学校数学における活用例

関数教材はFv，Gp、TI、Mat、平面図形教材はCbⅡ、Cin，TI、立体図形教材はCb3、確率・統計教材はEx、Gr、TI、Matが用いられる。以下、学年毎の学習内容へのPC活用例を考察してみる。全体的にグラフや図形の作図、デモストレーションの活用が多くなった。

Ａ　数と式

Ａ－１　正の数・負の数　［１年］

- 数直線上に動点を置き、スライダーで正の数、負の数をとるように動かす。
- 数直線上の２点$A(a),B(b)$を動かして、加減乗除の演算結果をプロットする。

Ａ－２　文字を用いた式　［１年］

- 数の代名詞である文字、数式の代名詞である文字式を図で表現してみる。
- 等式の性質を、天秤を用いた図で表現[13]し、均衡する意味を考えさせる。

Ａ－３　一元一次方程式　［１年］

・等式の扱い方で移項を天秤の図を用いて説明する[13]。
・比例式の性質を図で説明する。

A－４　文字を用いた式の計算　［２年］
・分配法則を図形的に表現する。

A－５　連立二元一次方程式　［２年］
・$x+ay=3, bx-y=1$ でa,b の値を動かして解法の式変化を観察する。

A－６　平方根　［３年］
・$\sqrt{2},\sqrt{5}$ を格子点平面上で作図する。

A－７式の展開と因数分解　［３年］
・乗法公式$\left(x+a\right)\left(x+b\right)=x^2+\left(a+b\right)x+ab, \left(x+a\right)^2=x^2+2ax+b^2$

$\left(x-a\right)^2=x^2-2ax+b^2, \left(x+a\right)\left(x-a\right)=x^2-a^2$ を図形的に確かめる。

A－８　２次方程式　［３年］
・円を利用して２次方程式$x^2-ax+b^2=0$ （$0<2b<a$）の解法を考える。

B　図形

B－１平面図形　［１年］
・垂直二等分線を作図する。

作図ソフトを用いて線分ＡＢを作図し、点Ａ，Ｂを中心にして円を描く。二つの交点を通る直線を引く。

・角の二等分線を引く。

点Ａを中心に任意の半径の円を描く。二つの交点Ｐ，Ｑを中心に任意の半径で円を描く。交点と点Ａを通る半直線を引く。

・直線ＸＹ上に点Ｐがあるとき、点Ｐを通るＸＹの垂線を作図する。

点Ｐを中心に円を描く。ＸＹとの２つの交点を中心として円を描き、その交点と点Ｐを通る直線を作図する。

・直線ＸＹ上にない点ＰからＸＹに垂線を引く。

点Ｐを中心に円を描き、ＸＹとの交点をＱ、Ｒとする。Ｑ、Ｒを中心として円を描き交点を求め、点Ｐと結ぶ。あるいは、Ｑ、Ｒを中心に半径ＰＱの円を描き二つの交点を結ぶ。

・直線ＸＹ上にない二点Ａ，Ｂが同じ側にあるとする。ＸＹ上に点Ｐを取って、ＡＰ＝ＢＰとなるようにする。

点Ａを通りＸＹに垂線lを引く。ＸＹとlの交点Ｃを中心に半径ＡＣの円を描く。lとの他の交点をＤとし、線分ＢＤの垂直二等分線とＸＹとの交点をＥとすれば点Ｅが求める点Ｐとなる。

・円Ｏ上にある点Ａでの接線を作図する。　点Ａを通り直線ＡＯの垂線を作図する。

Ｂ－２　空間図形　［１年 ］

・平面と平面の交わりは直線になることを確かめる。

基礎になる平面α上の２点Ｐ，Ｑを通る直線lを描き、その２点と空間上の１点Ｒを通る平面βを作図する。α,βの交わりは直線lになる。

・ねじれの位置にある直線を作図する。

基礎になる平面α上に直線lを引き、さらにα上でl上にない点Ｐを定め他の点はα上にない点Ｑをとると、直線ＰＱはlと平行でなく交わらない。（図２）

・垂直に交わる２平面を作図する。

平面に垂線を立てる作図ソフトを用い、その垂線を含む平面を作図する。

・正 4 面体、正 6 面体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体を観察する。

いずれも作図ソフトで作図し、回転させて空間的な形状を確かめる。

・正 12 面体の展開図を求める。

正 12 面体を作図し展開図を求めるツールを用いる。

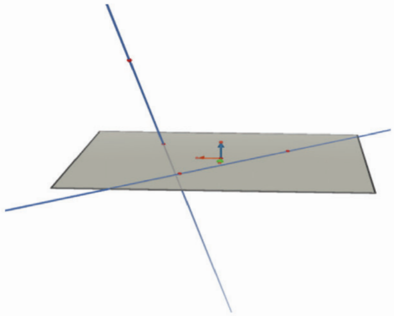

図２　ねじれの位置

・半径rの円を底面に持ち高さ$2r$の円錐と同じ半径の球の体積の和は同じ半径の円を底面に持ち高さ$2r$の円柱の体積に等しいことを観察する[14]。（図３）

中心Ｏから一定距離だけ離れ底面に平行な平面で切れば、円錐と球の断面の和は円柱の断面の面積になり、Cavalieri の原理から成り立つ。

Ｂ－３　基本的な平面図形と平行線の性質　［2 年］

・直線lに交わる水平線mを描き、mを垂直方向に動かして同位角、錯角が等しいことを観察する。残像効果を活用する。

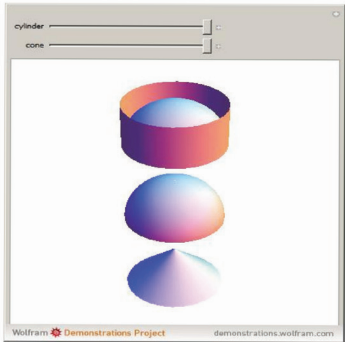

図３　球・円錐・円柱の体積の関係

Ｂ－４　図形の合同　［２年］

・合同な２つの三角形Ａ，Ｂを描き、一方を他方に平行移動、回転移動、裏返し移動で重ねる操作を行う。（CbⅡ）

・三辺のひとしい２つの三角形を移動して重ねる。

・二辺とその挟む角が等しい２つの三角形を移動して重ねる。

・一辺と両端の角が等しい２つの三角形を移動して重ねる。

Ｂ－５　図形の相似　［３年］

・２つの相似な三角形を相似の位置に動かして配置する。（図４）

点Oを中心とし対応する３点が直線上にくるように移動する。

・相似な２つの三角形の相似の中心を求める。

・三組の辺の比が等しい２つの三角形があるとき、相似の位置に配置する。

・二組の辺の比とその挟む角が等しい２つの三角形を相似の位置に配置する。

・二組の角がそれぞれ等しい２つの三角形を相似の位置に配置する。

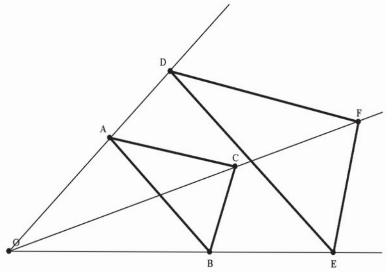

図４　相似の位置にある三角形

B－６　円周角と中心角　［３年］

・円に内接する三角形の一つの角を自由に動かして円周角が変わらないことを観察する。また、中心角が円周角の２倍であることを観察する。

・見込む角が一定の場合の点の軌跡が円になることで円周角の定理の逆が成り立つことを理解する。

・円に内接する四角形とその対角線を描くとき、同じ角を見つける。

B－７　三平方の定理　［３年］

・等積変形（小５で既習）を用いたアニメーション教材で三平方の定理を理解する。（図 5）（Gr,Fv）

・正方形内の任意の点で区分した図形による三平方の定理の証明図（図 6）

・$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}=2,\sqrt{5},\cdots$ を作図する。（図 7）（CbⅡ,Mat）

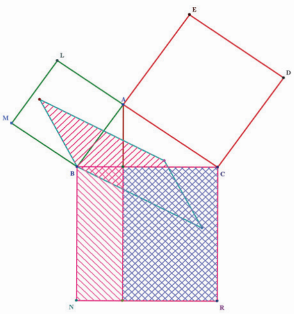

図５　等積変形による証明

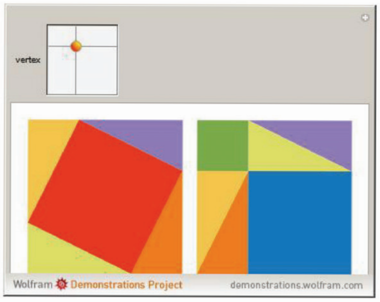

図６　正方形分割による証明

C　関数

C－１比例と反比例　［１年］

・$y=2x, y=-2x$　x にいろいろな値を選んで y の値を求め座標平面にプロットする。次に、この直線の方程式を入力しグラフを描く。プロットした点が直線上にあることを確認する。

・$y=ax$ の比例定数 a の値をいろいろ変化させてグラフを描き、観察する。$a>0, a=0, a<0$ の場合に分けてグラフの特徴を考える。

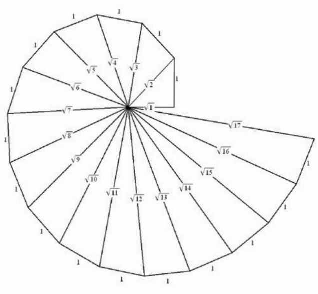
図７　spiral of Theodorus[14]

・$y=\frac{2}{x}, y=\frac{-2}{x}$　xにいろいろな値を選んでyの値を求め座標平面にプロットする。次に、この双曲線の方程式を入力しグラフを描く。プロットした点がどういう曲線上にあるか調べる。

・$y=\frac{a}{x}$のグラフを描き、比例定数aの値をいろいろ変化させて観察する。

$a>0, a<0$の場合のグラフの特徴を考える。

C－２　１次関数　［２年］

・$y=ax$と$y=ax+b$のグラフの位置関係を観察する。

２つの方程式を入力し、パラメータa,bをいろいろ変化させてbの意味を理解する。

・$y=ax-a+1$は、aがいろいろ変化しても固定点を通ることを調べる。

まず、予想させ、aを変化させグラフを調べ、固定点を通ることを理解する。

・$ax+by=c$が直線の方程式であることを確かめる。

陰関数の入力機能を用いて入力し、a,b,cにいろいろな値を入れて調べる。

特に、$a=0, b=0$のときのグラフの特徴を考える。

・$x/a+y/b=1$の方程式を入力し、軸の交点を調べる。

・$y=2x+1, y=-2x-1$のグラフの$x=-2$から$x=0$、$x=1$から$x=3$まで増加するとき、yの増加する割合を計算しグラフの形との関連を考える。

・二元連立１次方程式　$4x-3y=6, x+y=5$　をグラフで解く。

グラフを描き、交点のx座標、y座標を読み取り交点の意味を考える。

・$ax-y+a=0, x+ay+2a=0$の位置関係を調べる。

グラフの方程式を描いて直交することを確認する。また、方程式を解いて交点の座標を求め、aを変化させて観察し定円上にあることを確認する。

C－３　関数$y=ax^2$　［３年］

・物体を投げたときの軌跡をシミュレーションする（図８）（Cin）

・$y=ax^2$においてaの値をいろいろに変化させてグラフの形を観察する。

・$y=x^2, y=-x^2$がx軸に対称であることをy軸に平行な直線を動かして確認する。

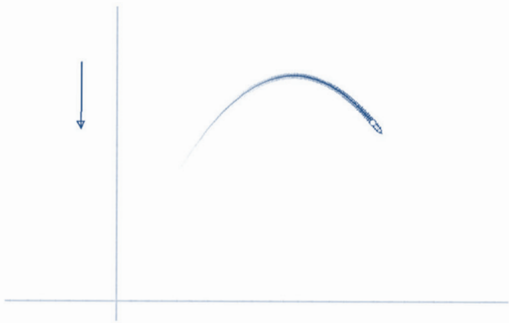

図８　物体の放物運動のシミュレーション

・$y=x^2$　xの変域が あるとき、yの変域はどうなるかを観察する。

$a \le x \le a+1$のときaをいろいろ変化させて調べる。（図９）

・$y=x^2, y=-x^2, y=3x+1$　$x=a$から$x=a+1$までの変化の割合を調べる。
　aをいろいろ変化させてそれぞれの割合を比べてその意味を考える。・$y=x^2$と$y=3x+4$のグラフを描いて交点を調べる。

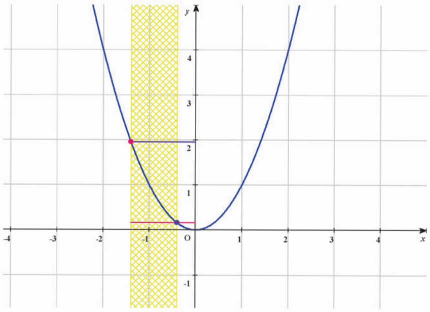

図９　区間での最大・最小

D　資料の活用

D－１　資料の整理と活用　［１年］

・40 名分の身長、体重のデータの度数分布表からヒストグラムを作成する。(図 10) (TI)

D－２　確率　［２年］

・サイコロを投げたときの特定の目が出る確率を求める。
　サイコロ投げを 1000 回して１の目の出る確率を乱数で求めグラフにする。

D－３　標本調査　［３年］

・40 名の家庭学習時間を調べた。今、５名の学習者を任意に選び標本平均を求めることを 10 回繰り返す。一方、母集団の平均を求めその差を比べてみる。

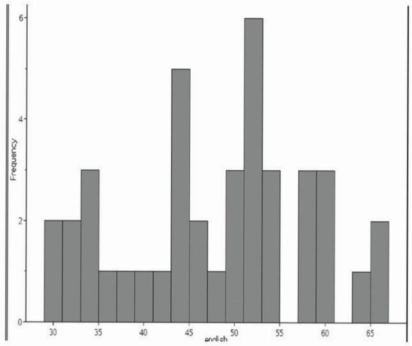

図 10　ヒストグラム

6　高校数学における活用例

関数教材は Fv、Gr、TI、Cin、図形教材は CbⅡ、Cb3、TI、Cin、統計教材は TI、EXCEL、Mat を活用する。

（1）数と式　［数学Ⅰ］

・展開公式を幾何図形で表現して理解する。

（2）２次関数　［数学Ⅰ］

・２次関数のグラフの形状を理解する。　$y=ax^2$ aの値を変化させグラフの形状を観察させる。各グラフは原点を中心として相似であることを理解する。

$y=a(x-p)^2+q$　a,p,qを変化させ頂点、x軸、y軸との交点を観察する。$y=ax^2$のグラフをどう平行移動すると重なるかを考える（図 11)。

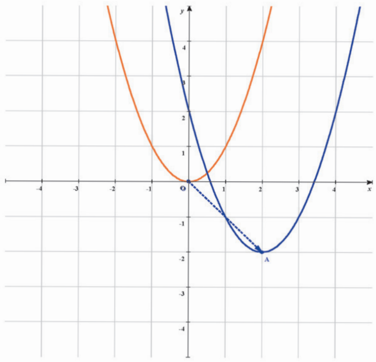

図 11　２次関数の平行移動

・２次関数の最大、最小を理解する

$y = ax^2 + bx$　a, b の変化とグラフの形状の変化を観察する。

a, b をスライダーで変化させ、アニメーションもできる。（図 12）（TI）

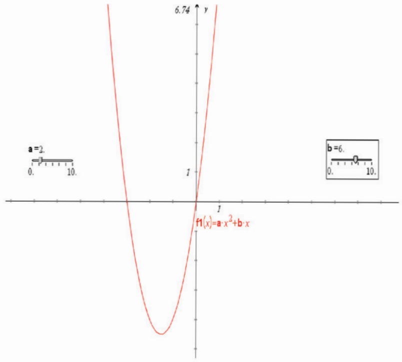

図 12　係数とグラフの形状の変化

$y = (x-1)^2 + 1$　a を変化させたとき区間 $[a, a+1]$ での y の値の最大、最小を調べる。

$y = -x^2 - 2ax - 1$　a を変化させ区間 $[0,1]$ での最大、最小を調べる。（図 13）（Fv）

・２次不等式と２次関数のグラフの関係を理解する。　図 13　２次関数の最大・最小

２次不等式 $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ の解とグラフの関係を理解する。x 軸より下にあるグラフ上の点の y 座標が負となる x 座標の値の範囲を視覚的に理解する。（Fv , Gr）

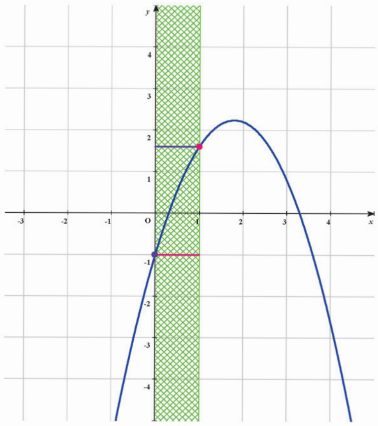

図 13　２次関数の最大・最小

（３）三角比、三角関数　［数学Ⅰ、数学Ⅱ］

・三角比の値は角Aが決まれば定まるという関数関係を理解する

２つの半直線 AX, AY 上に点 P, Q があり、$PQ \perp AP$ となるような直角三角形 APQ を作図し、このとき辺の比 $\dfrac{AP}{AQ}, \dfrac{PQ}{AP}, \dfrac{PQ}{AQ}$ は点 P, Q を変化させたときどうなるかを調べる。

・$y = \sin x$ のグラフを描く

単位円Ｏ上に動点 $P(\cos x, \sin x)$ をとり、x を０から始動したときの点 P の y 座標をプロットしてゆく。（図 14）（Fv）

・x を $\dfrac{\pi}{2}$ から始動する動点 P の x 座標をプロットして $y = \cos x$ のグラフを描く。

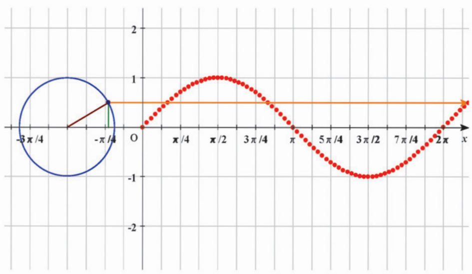

図 14　正弦曲線を描く

・点$(1,0)$に立てた垂線を直線ＯＰとの交点P'のy座標から$y=\tan x$のグラフを描く。

・$y=a\sin(bx+c)$　a,b,cの値を変化させてグラフがどう変化すかを観察する。

aはグラフの振幅、bは周期、cは平行移動に関係することを知る。

・$y=a\sin x+b\sin x$　a,bを変化させて単振動の合成を観察する。

・$y=\sin ax+\sin bx$　a,bの値を変化させてグラフの変化を観察する。

・加法定理の証明図を図形的に証明する[13]。

（４）データの分析

最大値・最小値、中央値（メジアン）、第一四分位数、第三四分位数から箱髭図（box plot、図 15）を作る。身長・体重の平均値、分散、共分散を求め回帰直線を得る。（図 16）（TI）

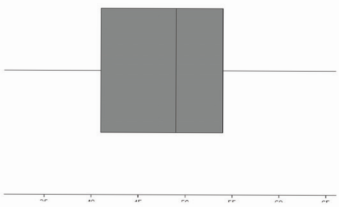

図 15　箱髭図

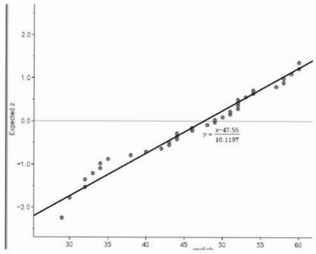

図 16　回帰直線

（５）指数関数・対数関数　［数学Ⅱ］

・点$A(a,2^a)$、$B(2^a,a)$を点入力し、aを変化させて点A,Bの軌跡を観察する。$y=x$に関して点A,Bが点対称であること、また点Bの軌跡も線対称であること、この軌跡が$y=\log_2 x$のグラフであることを理解する。（図 17）（Fv）

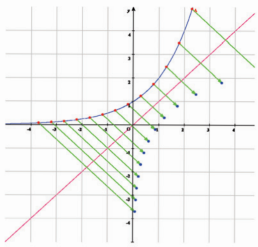

図 17 逆関数のグラフ

（６）図形と方程式　［数学Ⅱ］

・内分点、外分点を座標平面上でプロットして確認する。

・２直線$(2+k)x-(1-k)y-1+4k=0,(1-k)x+(2+k)y-1+4k=0$　の交点の描く軌跡を調べる。

・２点Ａ，Ｂに対してＡＰ：ＢＰ＝１：２となる動点Ｐの軌跡を試行錯誤しながら求める。

（Apollonius の円）

・円と直線の関係を、直線を動かして調べる。

・不等式の表された領域を座標平面上に表示する。

（７）微分の考え　［数学Ⅱ］

・$y=x^3$のグラフを描き、グラフを拡大し直線に近いことを観察する。（Gr）

・$y=x^3$に２点Ａ，Ｂをとり、直線を引く。点Ｂが点Ａに近づくとき直線は点Ａの接線に

近づくことを観察する。このとき平均変化率は点Aでの微分係数に収束することを確かめ、微分係数の図形的意味を理解する。

・$y=x^3-3x$ 上に接線を引き、接点を動かし接線の動きを観察する。

・$y=x^3-3x+1$ のグラフを描き、増減を調べ、極大・極小を確認する。

点 $\left(a, a^3-3a+1\right)$ での接線を描き、a を変化させて接線の動きを調べる。

（8）積分の考え［数学Ⅱ］

・$a \le x \le b$ における $f(x)=x^3-3x+2$ と x 軸で囲まれる面積を $F(a,b)$ として、関数 F の $x=b$ $x=b+h$ のときの値の差を面積の不等式で評価する。（図 18）

$\lim_{h\to 0} F(b,b+h)/h = F'(b) = f(b)$ のイメージ化を行う。

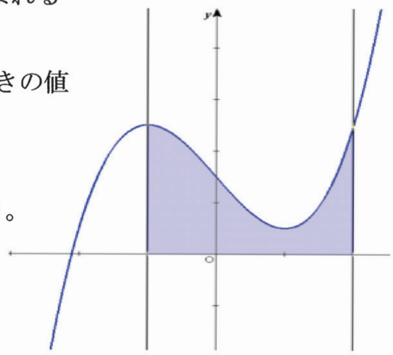

図 18　定積分と面積の関係

（9）場合の数と確率　［数学A］

・樹形図を表示して和の法則、積の法則を説明する。

・Pascal の三角形を図で確認する。

・疑似乱数や乱数サイを用いた Monte Carlo 法で円周率を求める。

（10）整数の性質　［数学A］

・図形を用いて Euclid 互除法を考える。14 と 9 の最大公約数を求める。横 14、縦 9 の長方形を考えて互除法で次々に正方形を切りとって最後に切り終わった辺の長さが求める数となることを図形で表示して理解する[13]。（図 19）

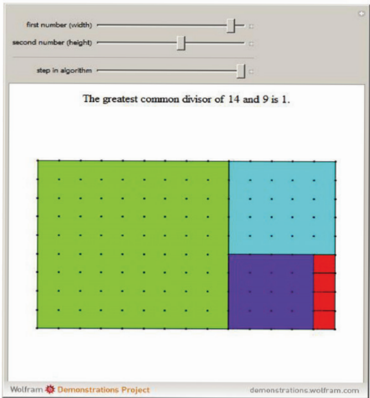

図 19　Euclid の互除法

（11）図形の性質　［数学A］

・図形の描画に作図ソフトを用いて幾何学的思考力を促す。

・幾何学の定理がさまざまな図形の配置でも成り立つことを点の移動で調べる。

・外心、重心、垂心が共線（Euler 線）であることを確かめる。（図 20）（Gr）

・Pascal の定理が円で成り立つことを確かめる。（図 21）（Cin）

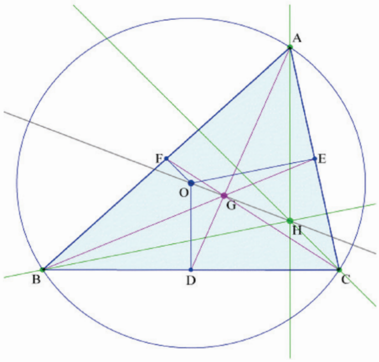

図 20　Euler 線

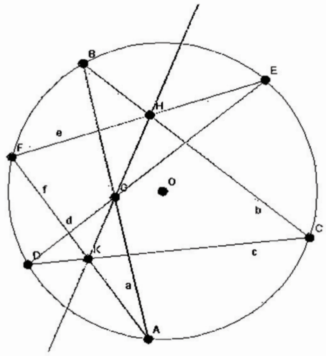

図 21　Pascal の定理

（12）確率分布と統計的推測　［数学Ｂ］

・２項分布 ${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$ の曲線を描く。(TI)

・正規分布曲線を描く。

（13）数列　［数学Ｂ］

・三角数、長方形数を図形的に表示し一般項を帰納的に考える。

・Fibonacci 数列 $f_n(n)=f_{n-1}(n-1)+f_{n-2}(n-2)$ を座標平面に図示する。

・Hanoi の塔のデモストレーションを行い、漸化式 $a_n=2a_{n-1}+1$ を理解する。(図 22)

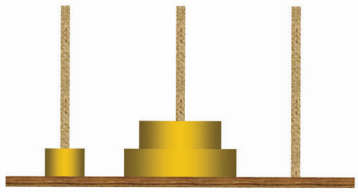

図 22　Hanoi の塔

（14）ベクトル　［数学Ｂ］

・ベクトルの和、差、定数倍、内積を作図する。(Gr)

・ベクトルをいくつか与えておき“ベクトル・オリエンテーリング”をする。

・ベクトル方程式を作図し点 P の移動で確認する。(図 23)　(Gr)

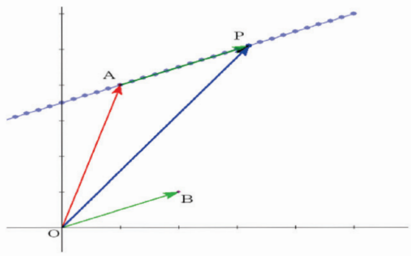

図 23　ベクトル方程式

（15）平面の曲線と複素数平面　［数学Ⅲ］

・３葉曲線、四葉曲線、八葉曲線を描く。

・$r=\sin n\theta$　曲線の作図を行う。(Gr、Fv)

・サイクロイドの描画（図 24）

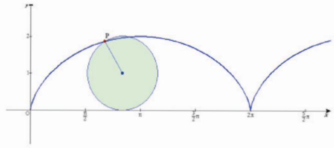

図 24　サイクロイドを描く

・複素数の和、差、積、商を複素数平面上で表現する。

・複素数の逆数の図形的意味を複素数平面上で考える。

・１の５乗根を用いて複素数平面上に五角形を描く。

（16）極限

・$a_n = \dfrac{3}{4}a_{n-1} + 1$ で表される数列の極限を $y = \dfrac{3}{4}x + 1$ と $y = x$ の交点で理解する。（図 25）

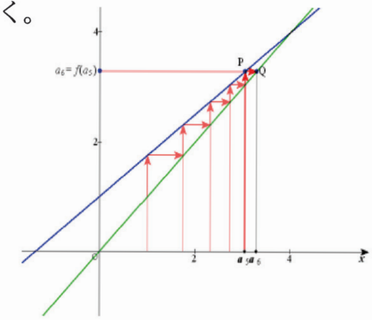

図 25　漸化式の極限

（17）微分法　　［数学Ⅲ］

・さまざまな関数式のグラフを描いて、筆算で求めた極値とグラフの概形が一致することを確認する。

・$y = a^x$ のグラフを描き、パラメータ a を変化させて値 2.182… に近づけていくと $x = 0$ で $y = x + 1$ に接することを確認し自然対数の底 e を理解する。

・$y = (1 + 1/x)^x$ を描き漸近線が $y = e$ であることを確認する。（図 26）（Mat）

・$\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ を求める。　（Mat）

・$y = \sin x / x$ のグラフを描き $x \to 0$ のとき $y \to 1$ となることを確認する。

・関数のグラフや極値を求める例題、練習問題をグラフに描いて確認する。

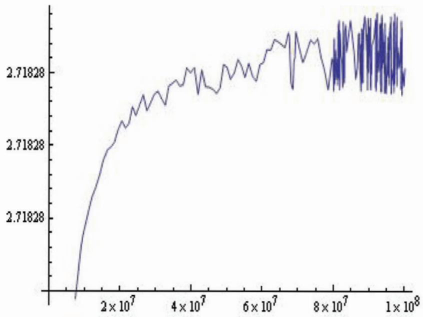

図 26　自然対数の近似曲線

（18）積分法　　［数学Ⅲ］

・不定積分や定積分の値を図形的に確認する。

・区分求積法で求める方法を図示する。

（19）数学と人間の活動　［数学活用］

・PC で動く三山くずしゲームを通して必勝法など遊びの中の数理を考える。

（20）社会生活と数学　　［数学活用］

・社会で関心の高まっている放射性元素の放射能の強さを表す式 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ をグラフで表示し、その半減期を調べる。（図 27）

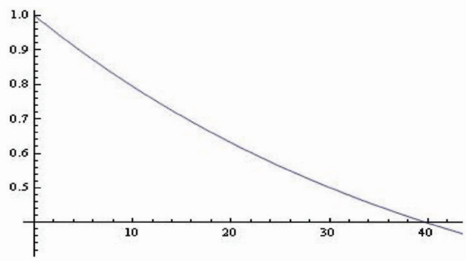

図 27　半減期曲線

7　Math ソフトの有効性

Math ソフトは3で挙げたようにそれぞれが独自の設計思想に基づいて開発されている。自由な教材観や教材の発想・解釈に基づく教材開発ができるためには、それらの発想や解釈に合致した Math ソフトを利用することが重要である。

これまで述べてきたように、中学生、高校生が学ぶ学校数学での Math ソフトの活用類型は、①解説型、②探究型に分かれる。解説型は、教授者が教科書の内容を理解させるために利用するタイプ、探究型は、PC を操作しながら学習者が問題解決を行うようなタイプである。

特に、数学的活動の課題解決における探究的活動では、事象に現れるパラメータを変化させて PC 上でシミュレーションしながら法則性を探すこともあるであろう。また、応用的活動ではちょっとした既習の数学を用いたモデルを PC 上で試してみることもあるであろう。こうした PC の活用で数学の何某かの知見を体験的、発見的に学ぶのである。これは自ら数学を作っていく体験であり、「数学する」活動すなわち数学的活動の趣旨でもある。Math ソフトの活用が学習者の問題解決のインスピレーションを刺激できればこれに勝るものはない。以下、学校数学の分野別に Math ソフトで作成する教材例の有効性を考察する。

7．1　中学校数学

A　数と式　　計算法則、等式の性質などを視覚的かつ動的な表示の工夫をすると有効に使える。Wolfram Demonstrations Project に掲載された例が参考になる。

B　図形

幾何図形の作図に活用し、また図形の頂点を自由に変化させることによって、幾何図形の動的なデモストレーションが可能であり、いろいろな性質を見つけることが出来る。これは定木、コンパスの方法では至難の業である。

C　関数

１次関数、２次関数のグラフが自由自在に描き、グラフのいろいろな性質を視覚的に理解できる。これは黒板による指導よりも絶大な効果がある。

D　資料の活用

データを度数分布表にまとめ、ヒストグラムを描くことによってデータの整理ができる。データの数が多いときはヒストグラムを作ることも大変な作業量となる。計算や作表は PC に任せて統計的な見方や考え方に焦点を当てた授業ができる。

7．2　高校数学

（1）数と式　　数と式に関する計算法則の検証などを視覚的に行える。

（2）２次関数

２次関数の平行移動、最大・最小のデモンストレーションは視覚的な効果がある。また、２次不等式を２次関数のグラフで視覚的に理解できる。

（3）三角比・三角関数

三角関数のグラフを導くデモストレーションは説得力がある。また、三角関数のグラフを描き視覚的に理解するのに効果的である。

（4）データの分析

データの平均値、中央値、最頻値、四分位数、四分偏差、分散、標準偏差、相関係数などの計算に威力を発揮する。さらに、箱髭図、散布図づくりも容易である。

（5）指数関数・対数関数

$y=2^x$ 上の点Pの $y=x$ に点対称な点Qの軌跡を描いて、$y=\log_2 x$ のグラフを説明できる。いろいろな形の式で表された指数、対数関数のグラフは視覚的に理解し易い。

（6）図形と方程式

内分点や外分点、重心、外心、垂心を求めて図形の性質を探究したりできる。また、Apollonius の円などの軌跡の曲線を求めたり、不等式の領域の点 (x,y) で、$x+y=k$ の値の最大・最小を求める線形計画法の問題を考えたりするのも効果的である。

（7）微分の考え

３次関数に交わる直線を考え、交点が近づいてゆくと直線が接線に重なることを見ることを通して、微分係数、導関数の概念を理解させることができる。従来、これは黒板で説明してきたところだがあらためて PC の威力を確認できる。

（8）積分の考え

微分の考えを用いて面積から不定積分を導く過程を視覚的に理解させるのにグラフを使う。板書よりもグラフがきれいに描けるのはありがたい。練習問題では、曲線を描き求める面積を視覚的にとらえるのが容易となる。

（9）場合の数と確率

場合の数を考える和積の法則を樹形図で表現する。２項定理の係数を Pascal の三角形と関連付けて扱う際に PC の表示機能を使うと図が描けて効果的である。

(10) 整数の性質

視覚的な内容があまりないが、Euclid 互除法を図形的に考える例がある。
Mat には素因数分解や素数判定、最大公約数、最小公倍数などを求める多くの数論関数があるので計算した結果の吟味に利用できる。

(11) 図形の性質

作図ソフトを用いると正確な図形が描けるし、点を移動させて図形を変形できるので、幾何学的なインスピレーションを刺激できるのは素晴らしいことである。

(12) 確率分布と統計的推測

２項分布や正規分布のグラフを描き、$-3\sigma,-2\sigma,-\sigma,+\sigma,+2\sigma,+3\sigma$ の範囲に分けた面積比の％や統計的推測のトピックスを表示する。

(13) 数列

数列を図形で表現したり、ゲームと関連させたりしながら扱うことで興味関心を喚起できる。Fibonacci 数列は三項間の関係で高度になるがいろいろ興味津々なトピックスとからま

せた教材展開ができるし、課題学習的に扱うのも効果がある。

(14) ベクトル

平面上にベクトルを表現し、演算した結果や図形的な性質とも関連させて扱う。ベクトル方程式は分かり辛い内容だが視覚的に表現すると理解し易い。

(15) 平面の曲線と複素数平面

いろいろな方程式で表された曲線がどのような曲線になるか予想させた後に描くことで興味・関心は高まり、理解が深まる。

複素平面上で複素数を表現し、演算した結果の幾何学的意味を考えさせる。和や差、実数倍はベクトルに似ているが積や商は回転があることを図に描いて理解させる。三角関数を用いた表現には De Moibre の定理が成り立つことを単位円に内接する正 n 角形で確認させる。

(16) 極限

極限の論理を視覚的に表現する教材を通して、直観的に理解させる。例えば、漸化式で表された数列の極限を２つの直線の交点で理解する。

(17) 微分法

数式で表現された関数の増減や極値をグラフで確認することができ大変便利である。

(18) 積分法　　不定積分や定積分の値を曲線の描画で確認する。

(19) 数学と人間の活動

PC を用いて遊ぶ数理パズルなどを数学の問題として取り上げる面白さがある。

(20) 社会生活と数学

社会生活の中からいろいろな事象を取り上げ、その数学モデルの PC によるシミュレーションで考えることができれば、数学のよさや有益さを知ることができる。

７．３　動的な教材の必要性

7.1、7.2 で述べた動的な教材の有効性から一歩踏み込んで必要性について述べる。先頃発表された TIMSS2011 の意識調査の結果[10]から、授業方法の工夫、特に学習者の興味・関心・意欲を引き出すような教材の必要性が判明した。このような教材を工夫し活用するためには、動的な教材の必要性を認識することが重要であると考えている。このことを、動的な事象の本となる“運動”や数学の研究方法の数学史的観点から考えてみる。

近代になって、Kepler が天体の法則を、Galilei が落体の法則を発見した当時の数学は Euclid の幾何学原論、Apollonios の円錐曲線論、Cardano の方程式論、Napier の対数であった。これらは変化や運動を扱っていなかったため発見した法則は数学的に表現できなかった。この辺の事情は、“とにかくその頃の数学で最も欠けていた点は、幾何学にしろ代数学にしろ、それだけでは「運動」というものを、その動きにおいてとらえることが出来ない点でした。それらの数学は、動かない図形、変化しない量を扱うことはできても、継続的に変化していく図形や量を、その変化の相で捉えるには不十分だったのです。ですからその頃の数学では、アキレスは亀に勝てないとかいう「ゼノンの迷理」という有名な難問題を、おかしいと思っても数学的に論破できずに手こずっていたのです”[15]、“ユークリッドが「原論」を組み立てたとき、そ

うした警戒心を持っていたらしく、彼は図形を動かすことをできるだけ避けようとしたらしい。なぜなら運動は必然的に無限の問題をともなっているからである”[13]と述べられていることから推測できる。Euclid 原論は“静的”な体系で、当時の他の数学と同様に「無限」を扱わないから、運動にかかわる動的な事象を扱えないことは明白である。

17 世紀以降、時代の要請から「変化＝運動」の科学研究が進み、“変化の言語”[15]関数の概念が考え出される。また、Decartes の座標幾何、Newton や Leipniz の微分積分、Euler の変分法などが自然科学へ活用され、応用研究が数学を引っ張り発展していく。未解決であった極限の問題は 19 世紀初頭、Cauchy によって終止符が打たれ、数学者を悩ませた運動の難点は解消された。その後、関数、写像・変換、ベクトル、微分方程式など動的な対象を扱う数学は発展を遂げる。

こうして Klein、 Moore は数学教育で関数の概念を重視することになる。そして、関数、ベクトル、微分積分など変化や運動を扱う動的な学習内容が学校数学に導入された。これらに関する原理・法則は動的な教材の「動き＝揺さぶり」の中で真に理解され得るのである。

また、17 世紀以降の数学は帰納的に原理・法則を見いだし、一般論を確立し発展していった。帰納的方法について高木[16]は次のように述べている。“ガウスが進んだ道は数学の道である。その道は帰納的である。特殊から一般へ！それが標語である。（中略）数学が演繹的であるというが、それは既成数学の修行にのみ通用するのである。（中略）しかし論理は当たり前なのだから、演繹のみから新しい物は何も出てこないのが当り前であろう。もしも学問が演繹のみに頼るならば、その学問は小さな環の上を永遠に周期的に回転する他はないであろう”。

帰納的方法は、学習者自らが原理・法則を見つけさせようとする発見学習で使われる。その活動では、事象に潜むパラメータを動かしながら操作・実験的に具体例を調べ上げ、帰納的に原理・法則を見出していく動的な教材が活用されるのは明らかである。

また、教科書という図書メディアにある静的な表現から動的なイメージを引きだすには視覚情報しかない。それを容易に行えるのは PC 活用による動的な教材であろう。そういう意味で Math ソフトによる動的な教材の有用性は確固たるものである。

8　Math ソフト教材の開発と活用上の課題

第一に、学習者が、何らかの予想を立て、グラフや図形の中にあるパラメータを自在に変化させ、その結果を予想と比較するなどしながら、パラメータと「変化＝動き」の因果関係を論理的に考える数学的体験が可能となる動的な教材の開発である。

５～６で述べてきたように、ある条件や方程式を満たすグラフや軌跡、曲線や図形の平行移動・相似拡大・１次変換・裏返し・反転、極限操作などは動的な対象である。分野別では、中学校数学では関数、図形、高校数学では数学Ⅰの２次関数、図形と計量、数学Ａの図形の性質、数学Ⅱの図形と式、指数・対数関数、三角関数、微分の考え、数学Ｂのベクトル、数学Ⅲの平面上の曲線と複素数平面、微分法などの動的な対象を扱う単元内容では、Math ソフトの活用

例が豊富である。しかし、代数、統計、確率・統計、整数、数列、積分などの各分野の教材開発が少ないと感じている。それぞれに視覚化する難しさがあるのは事実である。

例えば、静的な対象である行列を、動的な対象となる１次変換と結び付けて視覚化する、数列では三角数、正方形数などの図形数に結び付けるなど分野横断的、図形的な発想で教材を見れば新たな工夫が湧いてくるだろう。

第二に、Math ソフトの有効性を最大限に発揮できる授業の設計・構築である。まず、そのためには教授者の Math ソフトによる動的な教材に対する教材観が確立している必要がある。そうすれば、動的な教材を授業の中に的確に位置づけられる。導入、解説、探究のいずれで活用するか、また教授者が演示するか学習者の活動の中で使うかで扱いが異なってくる。

第三に、教室環境等の整備である。私立の学校には教室にプロジェクターや PC の整備が散見されるが、公立学校は今一歩である。なお、関数電卓も選択肢となろう。

9　おわりに

Cinderella には *Math in Motion*「動きの数学」という卓見ある表記がある。動的な教材を通した学習者の fantastic な数学体験が意義深いことへの確信であろう。このような体験を通して数学への興味や関心を一層高め、数学の学習が楽しくなればきっと数学の学力も今以上に向上していくに違いない。

引用・参考文献

1　片桐重信他：教室でのコンピュータ、共立出版、1996
2　Cabri II Plus ユーザー・マニュアル、Naoco、2009
3　Cabri3Dv2 ユーザー・マニュアル、Naoco、2010
4　Cinderella.2 Documentation ホームページ、Cinderella マニュアル
5　高機能関数グラフ・図形表示ソフト Function-View マニュアル
6　Graph Presentation & Experiment System(Grapes)マニュアル
7　Wolfram Methematica8:Mathematica ホームページ,Wolframresearch、2012
8　TI-Nspire CXCAS ユーザー・マニュアル：TEXAS INSTRUMENTS,2011
9　正田実・寺田文行・吉村啓：コンピュータによる新しい高校数学、日本評論社、1991
10 国立教育政策研究所：国際数学、理科教育動向調査の 2011 年調査、2012
11 林雄一郎：数学的活動についての一考察、北海道情報大学紀要第２３巻第２号、2012
12 林雄一郎：中学校における数学的活動についての一考察、北海道情報大学紀要第 24 巻第１号、2012
13 遠山啓：数学入門（上・下)、岩波新書、1976
14　Wolfram Demonstrations Project ホームページ： http://demonstrations.wolfram.com/
15 朝永振一郎：物理学とは何だろうか（上)、p.90、岩波新書、2004
16 高木貞治：近世数学史談第８刷、岩波文庫、2010