分数の定義とその割り算について

松井　伸也　　笹山　智司
北海道情報大学　　北海道大学

On the definition of fractions and their division

Shin'ya MATSUI and Satoshi SASAYAMA
Hokkaido Information University　　Hokkaido University

平成25年11月

北海道情報大学紀要　第25巻　第１号別刷

〈論　文〉

分数の定義とその割り算について

松井 伸也*　笹山 智司†

On the definition of fractions and their division

Shin'ya MATSUI*　Satoshi SASAYAMA†

要旨

数学を教育するとき，様々な概念を何らかの仮定の下に構成する事が必要になる。本稿では，分数の定義と演算，特に割り算，に焦点をあて議論を行う。

Abstract

If we educate mathematical subjects, we should construct them under some assumptions. In this article we focus on the fractions and give examples of the definition of them.

キーワード

数学教育，分数の構成，分数の割り算

1.　はじめに

分数（有理数）は，$\frac{m}{n}$ で表される数である。ただし m と n $(\neq 0)$ は整数である。よく知られるように，様々なアイデアで分数は構成されている。論理的に構成した例としては，高木貞治（[2]）が有理数とその演算を構成している。本稿では，有理数 $\frac{m}{n}$ を $n \times \frac{m}{n} = n$ を満たす数として定義し，その四則演算がどのように構成され得るかを定理として示すことを目的とする。高木（[2]）では大小関係に根ざして，自然数，整数，有理数と構成し，その演算を定義している。本稿では，これとは異なり「数直線」と「等式の性質」に根ざし自然数，整数，有理数とその演算を構成したいと思う。数直線と等式の性質は，中学から高校にかけて数学で取り扱われ，理解しやすいテーマである。一方有理数の演算，特に割り算，は小学校の算数から計算を行っているが，いかなる理由で有理数の演算が構成されるかは，なかなか理解されていない。この有理数の構成とその演算が，幾つかの単純な仮定から説明出来ることを示し，学生（特に教職課程）が分数を説明する一つの助けとしたい。

2.　数直線と等式の性質

本稿では実数の構成を目的とはしないので，実数とその演算の存在を認める。有理数が，数直線上にどのように実現されるかを定義しよう。実数が「数直線上に実現できる」とは，与えられた実数に対応する点をコンパスと定規で数直線上に作図すること，とする。最初に次を仮定する。

(A1) 直線上に 0 と 1 に対応する点を定める。この直線を数直線とよぶ。なお 1 に対応する点は，慣習に従って，0 に対応する点の向かって右側に取ることにする。また右側にある実数（または点）を正とし，左側にある実数（または点）を負とする。

(A2) 数直線上の点に対応するある実数 x に対して，$-x$ は原点に関して点対称な位置にある点に対応する実数である。このような点はコンパスで作図可能である。なお $-x$ と $-1 \times x$ は同一視する。

今後簡単のため，「数直線上の点に対応する実数 x」を単に「数直線上の実数 x」と表現する。

上の二つを認めると，整数が数直線上に実

* 北海道情報大学　情報メディア学部教授
Professor, Faculty of Information Media, HIU

† 北海道大学　理学部非常勤講師
Part-time Lecturer, Fuculty of Science, Hokkaido University

現できる。実際 0 と 1 の距離をコンパスでとる。n を任意の自然数とする。0 から向かって右側の点で n の距離にある点が，自然数 n である。このような点はコンパスで作図可能である。すると仮定 (A2) に従って $-n$ が実現され，数直線上に整数に対応する点が実現する。

分数の定義を与えるために，等式の性質を仮定する。なお，ある数直線上の実数 x と 整数 n に対して，nx に対応する点は，明らかに実現可能である。

- 実数 x_1，x_2，y_1，y_2 に対し，次が成立する。

(A3-1) $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ ならば $x_1+y_1 = x_2 + y_2$ が成立する。

(A3-2) $x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ ならば $x_1\times y_1 = x_2 \times y_2$ が成立する。

- 実数 x と y に対し，次が成立する。

(A4-1) $0 + x = x$，$x - x = x + (-x) = 0$

(A4-2) $1 \times x = x$，$0 \times x = 0$

(A4-3) $x \times y = 0$ ならば $x = 0$ または $y = 0$ が成立する。

定義 1　整数 m と n が存在して $nx = m$ を満たすとき，x を有理数とよび $x = \dfrac{m}{n}$ と表す。慣例に従い n を分母といい，m を分子という。

簡単に述べると，n 倍すると m になる数を有理数 $\dfrac{m}{n}$ として定義しよう，ということである。数直線上で，原点 0 と整数 m の距離の n 等分を作図することは容易であるから，有理数 $\dfrac{m}{n}$ は数直線上に実現可能である。

定理 1　整数 m が $m \neq 0$ のとき，分母を 0 とする有理数 $\dfrac{m}{0}$ は存在しない。分母と分子が 0 である有理数 $\dfrac{0}{0}$ に対応する実数は一意に定まらない。

この定理により，分母が 0 である有理数は存在しないか，定義できない。よって，今後有理数の分母は 0 でないと仮定する必要があることが分かる。一方，$m \neq 0$ のとき，$mx = 0$ を満たすと仮定 (A4-3) より，$x = 0$ である。即ち $\dfrac{0}{m} = 0$ である。

定理 1 の証明　$m \neq 0$ とする。$x = \dfrac{m}{0}$ を満たす x が存在したと仮定しよう。定義より $0 \times x = m$ であるが，仮定（A4-2）により，$0 = m$ である。これは $m \neq 0$ に反する。故に，$x = \dfrac{m}{0}$ をみたす実数 x は存在しない。

次に $x = \dfrac{0}{0}$ を満たす実数 x が存在したとする。定義より $0\times x = 0$ であるが，仮定 (A4-2) により，$0 = 0$ に他ならない。$0 \times x = 0$ は任意の実数 x に対して成立するので，$\dfrac{0}{0}$ は一意に実数を定めない。以上。

定理 2　m，n，p，q を整数とする。次が成立する。

(i) $n \neq 0$ のとき，$nx = m$ かつ $ny = m$ ならば $x = y$ である。即ち分数 $\dfrac{m}{n}$ が表す実数は一意に定まる。

(ii) $n \neq 0$ かつ $p \neq 0$ のとき，$\dfrac{m}{n} = \dfrac{mp}{np}$ である。即ち，約分が出来る。

(iii) $n \neq 0$ のとき，$\dfrac{m}{n} = m \times \dfrac{1}{n}$ である。

(iv) $n \neq 0$ のとき，$-\dfrac{m}{n} = \dfrac{-m}{n} = \dfrac{m}{-n}$ である。

(v) $n \neq 0$ かつ $p \neq 0$ のとき，$\dfrac{m}{n} + \dfrac{q}{p} = \dfrac{mp + qn}{np}$ である。即ち，有理数の和は，通分が必要である。

(vi) $n \neq 0$ かつ $p \neq 0$ のとき，$\dfrac{m}{n} \times \dfrac{q}{p} = \dfrac{mq}{np}$ である。即ち，有理数の積は，分母・分子同士の積になる。

証明 (i) を示す。$nx = m$ と $ny = m$ の差をとると，(A3-1) より $nx - ny = m - m$ が成立する。(A4-1) から右辺 $= 0$ である。これより $n(x - y) = 0$ であるから，(A4-3) より $n = 0$ または $x - y = 0$ である。仮定から $n \neq 0$ であから $x - y = 0$ を得る。この両辺に y を加えると，(A3-2) から $x = y$ を得る。

(ii) を示す。$x = \dfrac{m}{n}$，$y = \dfrac{mp}{np}$ とおく。有理数の定義より $nx = m$，$npy = mp$ が成立する。(A3-3) より，$npx = mp$ が成立する。一方，(A4-3) の対偶をとると，$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ $\Rightarrow$ $xy \neq 0$ を得るから，$np \neq 0$ である。よって $npx = mp$ かつ $npy = mp$ なので，(i) より $x = y$ を得る。

(iii) を示す。$x=\dfrac{1}{n}$，$y=\dfrac{m}{n}$ とおく。有理数の定義より $nx=1$，$ny=m$ が成立する。(A3-3) より，$mnx=m$ 即ち $n(mx)=m$ が成立する。$n\neq 0$ であるから，(i) から $mx=\dfrac{m}{n}$ である。

(iv) を示す。$x=-\dfrac{m}{n}$，$y=\dfrac{-m}{n}$ とおく。有理数の定義より $ny=-m$ が成立する。

一方 (A4-1) の $x+(-x)=0$ の両辺に $-(-x)$ を加えると $x+(-x)-(-x)=-(-x)$ なので，(A4-1) の $x-x=0$ より $x=-(-x)$ を得る。よって $x=-\dfrac{m}{n}$ から $-x=-\left(-\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{m}{n}$ である。故に $n(-x)=m$ を得た。同様に，この両辺に -1 をかけると $nx=-m$ を得るので，(i) より，$x=y$ を得る。$\dfrac{-m}{n}=\dfrac{m}{-n}$ も同様に証明できる。

(v) を示す。$x=\dfrac{m}{n}$，$y=\dfrac{q}{p}$ とおく。有理数の定義より $nx=m$，$py=q$ が成立する。(A3-2) から $npx=mp$ かつ $npy=qn$ である。よって (A3-1) から $np(x+y)=mp+qn$ であるが，$np\neq 0$ だから (i) より $x+y=\dfrac{mp+qn}{np}$ である。

(vi) を示す。$x=\dfrac{m}{n}$，$y=\dfrac{q}{p}$ とおく。有理数の定義より $nx=m$，$py=q$ が成立する。(A3-2) から $npxy=mq$ 即ち $np(xy)=mq$ である。よって $np\neq 0$ だから (i) より $xy=\dfrac{mq}{np}$ である。以上ですべての証明がなされた。

注意：(v) の証明と同様に，$n\neq 0$ のとき $\dfrac{m}{n}+\dfrac{q}{n}=\dfrac{m+q}{n}$ をえる。

さて，整数 m と $n\neq 0$ の割り算 $m\div n$ は $m\div n=\dfrac{m}{n}$ となるように定める必要があろう。よって，実数の割り算は，この拡張になるように定めよう。

定義 2 実数 x と $y\neq 0$ に対して，$yz=x$ を満たすとき，$z=\dfrac{x}{y}$ と書く。即ち，$x\div y=\dfrac{x}{y}$ である。x と y が整数のときは，定理 1 (i) により z は有理数 $\dfrac{x}{y}$ に他ならない。

定理 3 m，n，p，q を整数とする。$n\neq 0$，$p\neq 0$ かつ $q\neq 0$ のとき，

$$\frac{m}{n}\div\frac{q}{p}=\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}$$

である。

証明 左辺 $=z$ とおくと，定義 2 より $\dfrac{q}{p}z=\dfrac{m}{n}$ である。有理数の定義から

$$n\times\frac{m}{n}=m,\quad p\times\frac{q}{p}=q$$

が成立する。そこで $\dfrac{q}{p}z=\dfrac{m}{n}$ の両辺に np をかけると

$$\begin{aligned}\text{左辺}\ &=np\times\frac{q}{p}z=n\times\left(p\times\frac{q}{p}\right)z\\&=n\times q\times z=(nq)z,\\\text{右辺}\ &=np\times\frac{m}{n}=p\times\left(n\times\frac{m}{n}\right)=p\times m\end{aligned}$$

を得るので，$(nq)z=pm$ を得る。$nq\neq 0$ だから定理 1（i）より $z=\dfrac{pm}{nq}$ を得る。即ち，定理 1（vi）より

$$\frac{m}{n}\div\frac{q}{p}=\frac{pm}{nq}=\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}$$

を得る。以上である。

3. 実数の構成に向けて

有理数の構成と実現は，前章で十分である。この章では「実数が如何に構成されるか」の説明を試みたいと思う。「有理数は実数で稠密性である」を使い実数を構成するのが，一番わかりやすい。ここで，「有理数は実数で稠密性である」とは次の定理をいうのであった。

定理 4 a，b を実数とする。もし $a<b$ ならば $a<q<b$ を満たす有理数 q が存在する。

この定理 4 の説明を，前章の考え方に沿って行おう。この定理の証明は，実数のアルキメデス性を利用し行う（例えば [1] の命題 (1.2.4))。ここでは，このアルキメデス性の部分を直感に頼り，二つの実数 a と b が与えらたとき $(a<b)$，どのように $a<q<b$ を満たす有理数が実現できるかを説明することにする。

Case 1. a と b が整数のときは，$q=\dfrac{a+b}{2}$ とおくと良い。

Case 2. a または b が整数ではなく $a+1\leq b$

とき。明らかに $a < m < b$ を満たす整数 m が存在する。よって $q = \dfrac{m}{1}$ とすると良い。この m は次のように作図を行えば，数直線上に実現できる。簡単の為に $0 < a < b$ とする。なお $a < 0 < b$ ならば $q = 0$ とすれば良い。

(1) 0 と 1 の距離をコンパスでとる。

(2) a と b が共に整数ではないときは，原点から初めて，右に整数を取っていき，a を超えた最初の整数が m である。なお $a+1 \leq b$ かつ a と b が共に整数ではないので，$a < m < b$ である。

(3) a が整数であり，b は整数ではないときは $a < a+1 < b$ である。よって $m = a+1$ である。

(4) b が整数であり，a は整数ではないときは $a < b-1 < b$ である。よって $m = b-1$ である。

Case 3. $a+1 > b$ とき。$0 < b-a < 1$ なので，$\ell = b-a$ をコンパスで取る。$(n+1) \times \ell > 1$ をみたす最初の自然数を n としよう。このような自然数が存在することは，実際に作図すると理解できるであろう。すると $n\ell \geq 1$ 即ち $n(b-a) \geq 1$ なので

$$na + 1 \leq nb$$

である。na と nb は作図可能であるので，Case 2 より $na < m < nb$ を満たす整数 m がとれる。よって $q = \dfrac{m}{n}$ とすれば良い。なお線分の n 等分も作図可能であることに注意しよう。

以上から定理 4 の有理数が実現できた。

この定理 4 を使うと，良く知られているように，任意の実数は有理数からなる数列で近似が出来る。実際 a を任意の実数とし，n を自然数とする。$a - \dfrac{1}{n} < a + \dfrac{1}{n}$ なので，定理 4 から

$$a - \frac{1}{n} < q_n < a + \frac{1}{n} \quad 即ち \ |a - q_n| < \frac{1}{n}$$

をみたす有理数 q_n が実現できる。この不等式から $\lim_{n\to\infty} q_n = a$ は明らかであろう。このようにして，有理数から実数が構成できるのである。

4. 終わりに

本稿では，有理数 $\dfrac{m}{n}$ を「n 倍すると m になる数」として導入した。この定義は，小学校から習ってきた分数に矛盾することなく単純な定義であろう。また有理数の演算は，0 と 1 に関する性質（仮定）と非常に単純な等式に関する性質（仮定）から定理として説明できる，という良さを持つ。どのように有理数を構成しても良いのだが，単純な仮定から始めるのは理解しやすいのではなかろうか。数学を教える者にとって，何らかの概念を構成するというのは，常に必要なことである。「分かりやすい概念の構成」を考える上で，この小論を参考にしていただけたら幸いである。

参考文献

[1] 岩堀長慶編 (1983) 「微分積分学」，裳華房。
[2] 高木貞治 (2008)「新式算術講義」，筑摩書房。