

# 高校数学における発展的オプション教材の意義について

林 雄一郎

北海道情報大学

On the Signification of the Progressive Optional Teaching Materials  
in High School Mathematics

Yuuichirou HAYASHI

Hokkaido Information University

平成26年 3 月

北海道情報大学紀要 第25巻 第 2 号別刷

## 〈研究ノート〉

## 高校数学における発展的オプション教材の意義について

林 雄一郎\*

On the Signification of the Progressive Optional Teaching Materials  
in High School Mathematics

Yuuichirou HAYASHI

## 要 旨

我が国が科学技術創造立国を目指すには、数学に興味・関心があり、数学的能力の高い生徒への数学教育がもっと重視されるべきである。この特別教育においては、彼らの資質・能力を掘り起こし、伸ばすような教材の開発が重要である。本稿では、特別教育の観点から発展的教材の意義を論じるとともに、整数・代数では **Chinese remainder theorem** に関する問題、幾何では **Alberos** 図形と算額の問題、**Pascal** の定理と円錐曲線、解析では曲線図形の求積など歴史的な素材を例示するとともに、特別教育の課題を提示する。

## Abstract

So that our country aims at the building nation that is creative in science and technology , math-education of talented students who are interesting in mathematics should be emphasized furthermore. In this special education, the development of teaching materials which digs up and develops their abilities is important. The author argued about signification of the progressive teaching materials from the viewpoints of special education, and gave examples of historical raw materials for teaching materials about the problems of the Chinese remainder theorem in number theory and algebra, problem of alberos and “Sangaku”, Pascal’s theorem and conic curves in plane geometry and mensuration of plane figure surrounded by curves in analysis. Finally, the problems of special education for talented student are presented.

## キーワード

数学教育 (mathematics education)、教材開発 (development of teaching materials)、才能ある学生への特別教育 (special education for talented students)、個性重視 (serious consideration of the personality)

---

\*北海道情報大学情報メディア学部情報メディア学科教授 Professor , Department of Information Media , faculty of Information Media

## 1 はじめに

数学教育は、生徒の興味・関心や持っている能力に応じた指導を基本に据えて行われることが望ましい。これは個性の尊重、個性重視の原則に基づいた理念である。

しかし、自然学級であれば興味・関心・能力には差異があり、授業の流れの中でそれぞれの差異に対応する指導を進めるには高度な指導技術が必要である。そのため、平均的なレベルに合わせた一斉指導が取られることになる。また、「分かる授業」を心掛ければ理解度の遅い生徒にレベルを合わせて授業を進めることになる。いずれにせよ、理解度の早い生徒や能力高い生徒は置き去りになる。結果として、授業に満足できなかったり、能力を伸ばしきれないことになる。

かつて提言された第16期中教審答申（文部科学省, 1997）では、形式的平等性の排除と個性の重視、そして「教育上の例外措置」が謳われた。これは、数学や物理などの特定分野について優れた能力や意欲を持つ生徒への教育の充実であり、積極的な人材発掘、能力開発を目指す理念である。今日、SSHなどのプロジェクトの高大連携で生徒が大学で学んだり、大学の教員が高校で講義したり飛び入学などの形で一部が実現している。

近年、知識基盤社会（knowledge-based society）と言われ、知の創造的な探求とその利活用が求められており、科学技術創造立国を担う有為な人材育成が求められている。

また、教育方法のイノベーションが求められてきた。指導法としては、一人ひとりの生徒の能力・適性に応じる指導を目指し、学習集団の学力の均質化を図る習熟度別学級編成やチーム・ティーチングによる授業、学習集団を細分化したグループ学習や個別指導、

補充指導、教材・教具の工夫・開発やマルチメディアの活用などが重視されてきた。

教材についても、2003年の学習指導要領の改訂で、生徒の実態に応じ、学習指導要領に示していない内容を加えて指導できるようになっており、生徒の実態に応じ、確固たる教材観に基づいた教材を用いて授業を行う機会は広がっている。

こうして、教科書のコア教材で基礎力を習得した後、更に興味・関心を喚起し、課題探究力や応用力を高める数学的活動を促すようなオプション教材が求められている。

本稿では、数学的能力のある高校生に対して数学に対する興味・関心を喚起し、数学のよさを啓発できる発展的教材例を考察するとともに、特別指導の課題を考察する。

2では、発展的教材の意義について考察する。3では整数・代数、4では幾何、5では円錐曲線、6では求積問題の素材例を挙げる。7では、特別指導の課題について述べる。

## 2 発展的教材の意義

学習指導要領の内容とは異なり、少しレベルは高いが、数学への興味・関心を誘う教材全般を“発展的オプション教材”と呼ぶことにする。これまでは、このような教材を大学入試問題から拾う場合が多かったが、数学教育の観点から吟味した有意義な素材の教材化が求められていたといえる。

学習指導要領に含まれている内容の発展教材については、高校数学の内容は数学を含めた数理科学のベースになっているものが多いことから無尽蔵であると考えられ、それらの中から高校生が学ぶことが望ましい素材の教材化が考えられる。

特に、数学史は数学教育の素材の宝庫であ

り、定理や命題の発見・証明にかかわった数学者が生きた時代背景や諸科学の発展との関連などを学ぶことにより、一つ一つの定理や命題に親近感が深まるであろうし、数学者の生き様から自分の人間としての在り方・生き方に対する多くの示唆を得ることができ、歴史好きの生徒は数学史を通して数学文化に入るきっかけにもなる。こうして、教材の歴史性は極めて重要な要素である。

また、学習指導要領の改訂に当たって、日本数学教育学会が要望した離散数学、微分方程式、数値計算、回帰直線は外された（日本数学教育学会, 2006）。離散数学は新しい分野だが実用上重要である。事象を探究する数学的活動では、事象の数学化に微分方程式、データの集計や統計的処理には数値計算、回帰直線は必須である。したがって、教材の有用性も選定に当たっての大事な要素である。

いずれにせよ、発展的オプション教材は教科書に記述された基礎的な数学知を広げ、興味深い数理的知への冒険に誘うものとなる。

以下では、学習指導要領に示された内容を発展させ、数学史と関連した素材を取り上げる。

### 3 整数・代数からの素材例

数理パズルにはハッとするような面白いものがあり、その中には美しい数理が潜んでおり、また数学教育上有益なものがある。

このようなパズルを解くうちに数や図形に関心を深め、基本的な原理・法則を学び、体系的に組み立てていく数学の考え方を体得し、事象を数学化し解決する力が培われれば好ましいと思う。以下、いわゆる中国剰余定理にちなんだパズルを挙げる。

[問題]

「21世紀（2001年～2100年）の中で、3, 5, 7で割った余りがそれぞれ1, 4, 3である年は西暦何年か？」（土井、2006）

高校生が解くとすれば、求める数を  $x = 3s + 1 = 5t + 4 = 7u + 3$  とおき

$$3(s-1) = 5t \quad s = 5s' + 1 \quad \therefore x = 15s' + 4$$

他方、 $15s' + 4 = 7u + 3$

$$15(s'+1) = 7(u+2) \quad s'+1 = 7s''$$

$$s' = 7s'' - 1$$

$$\therefore x = 15(7s'' - 1) + 4 = 105s'' - 11$$

$$2001 \leq 105s'' - 11 \leq 2100$$

$$19.7 \dots \leq s'' \leq 20.1 \dots$$

$$\therefore s'' = 20 \quad x = 105 \times 20 - 11 = 2089 \text{ (年)}$$

とするものであろう。

合同式を学んでいれば次のような解き方も考えられる。

$$x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 4 \pmod{5}, x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x = 1 + 3s, \quad 1 + 3s \equiv 4 \pmod{5}$$

$$s \equiv 1 \pmod{5}$$

$$3s \equiv 3 \pmod{15}$$

$$x = 1 + 3s = 1 + (3 + 15s') = 4 + 15s' \equiv 3 \pmod{7}$$

$$14s' + s' \equiv -1 \pmod{7} \quad s' \equiv -1 \pmod{7}$$

$$s' = -1 + 7s''$$

$$\therefore x = 4 + 15s' = 4 + 15(-1 + 7s'') = -11 + 105s''$$

後の処理は高校生の解と同様である。

数学者の解答は次の通り（土井、2006）。

一般に、3, 5, 7で割って余りを  $a, b, c$  とすると整数の一般形は次式になる。

$$70a + 21b + 15c + 105t \quad t \text{ は整数} \quad \dots (*)$$

この式で  $a=1, b=4, c=3$  を代入する  
 $70 \times 1 + 21 \times 4 + 15 \times 3 + 105t = 199 + 105t$   
 $2001 \leq 199 + 105t \leq 2100 \quad t=18$  よって  
 求める答えは  $199 + 105 \times 18 = 2089$ (年)

(\*) 式が何故成り立つかという問から数学の世界への探索が始まる。まず、3, 5, 7で割って余りがそれぞれ1, 4, 3となる数の集合  $W$  を考えることから始める。 $W$  に含まれる一つの解を  $x_0$  とすれば一般解  $x$  は次式で表される。  $x \equiv x_0 \pmod{105}$

$$\text{したがって } W = \{x_0 + 105t \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

そこで  $x_0$  を見付けねばならない。それには頭ごなしだが次式を考える。

$$70 \equiv 1 \pmod{3}, 70 \equiv 0 \pmod{5}, 70 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$21 \equiv 0 \pmod{3}, 21 \equiv 1 \pmod{5}, 21 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$15 \equiv 0 \pmod{3}, 15 \equiv 0 \pmod{5}, 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

各行に  $a, b, c$  を掛ける。

$$70a \equiv a \pmod{3}, 70a \equiv 0 \pmod{5}, 70a \equiv 0 \pmod{7}$$

$$21b \equiv 0 \pmod{3}, 21b \equiv b \pmod{5}, 21b \equiv 0 \pmod{7}$$

$$15c \equiv 0 \pmod{3}, 15c \equiv 0 \pmod{5}, 15c \equiv c \pmod{7}$$

列ごとに加える。

$$70a + 21b + 15c \equiv a \pmod{3}$$

$$70a + 21b + 15c \equiv b \pmod{5}$$

$$70a + 21b + 15c \equiv c \pmod{7}$$

$70a + 21b + 15c \in W$  となる。これが特殊解  $x_0$  である。  $a=1, b=4, c=3$  とおくと

$$70 \times 1 + 21 \times 4 + 15 \times 3 = 199 \equiv 94 \pmod{105}$$

なお、数式処理システム **mathematica** にはこの特殊解を求める数論的関数があり、**ChineseRemainder**[{1,4,3},{3,5,7}]で非負最小整数 **94** ( $= -11 + 105 \times 1$ ) を得る。

以上を一般化すると次の定理を得る。

「 $m_1, m_2, \dots, m_k$  が2つずつ互いに素であり、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  は任意の整数とするとき

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \dots, x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

を満足させる  $x_0$  は  $M \equiv m_1 m_2 \cdots m_k$  を法と

して必ず存在する。一般解は

$$x \equiv x_0 \pmod{M} \quad x = x_0 + Mt \quad t \in \mathbb{Z}$$

証明は以下の通り(高木、2000)となる。

$$M = 3 \times 5 \times 7 \quad m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 7$$

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 3 \quad \text{とする。}$$

$$M_1 = M / m_1 = 35$$

$$M_2 = M / m_2 = 21$$

$$M_3 = M / m_3 = 15$$

$$\text{よって } (m_i, M_i) = 1$$

不定方程式  $3s_1 + 35t_1 = 1$  は整数解

$$(s_1, t_1) = (-23, 2) \text{ をもつ。}$$

$5s_2 + 21t_2 = 1, 7s_3 + 15t_3 = 1$  も同様である。

$$M_1 t_1 = 35 \times 2 = 70 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$M_2 t_2 = 21 \times 1 = 21 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$M_3 t_3 = 15 \times 1 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\therefore M_i t_i \equiv 1 \pmod{m_i} \quad (M_i t_i) a_i \equiv a_i \pmod{m_i}$$

$$i \neq j \text{ ならば } m_j \mid M_i \quad \text{より } M_i t_i \equiv 0 \pmod{m_j}$$

$$(M_i t_i) a_i \equiv 0 \pmod{m_j}$$

$$70a_1 + 21a_2 + 15a_3 \equiv a_1 \pmod{3}$$

$$70a_1 + 21a_2 + 15a_3 \equiv a_2 \pmod{5}$$

$$70a_1 + 21a_2 + 15a_3 \equiv a_3 \pmod{7}$$

$$\text{よって } \sum_{i=1}^k (M_i t_i) a_i \text{ は特殊解になり、一般}$$

解は  $Mt$  を加えた形になる。

この定理は、中国の算術書「孫子算経」(3~5世紀)にあり、**Chinese Remainder Theorem** と呼ばれる。それには、「今、物が

あるが数は不明である。三つずつ数えると二余り、五で割ると三余る。七で割ると二余る。その数如何？」と問い、答は二十三とある。

また、この解法は、「三で割ると二余る数として百四十 ( $70a = 70 \times 2$ ) と置く。五で割ると三余る数として六十三 ( $21b = 21 \times 3$ ) と置く。七で割ると二余る数として三十 ( $15c = 15 \times 2$ ) と置く。これらを足し合わせて、二百三十三 ( $70a + 21b + 15c = 233$ ) これから二百十 ( $105 \times 2$ ) を引いて答を得る。一般に、三つずつ数えて一余ると、その度に七十と置く。五で割った余りに二十一をかける。七で割った余りに十五をかける。百六以上なら百五を引くことで答を得る」とある。(中国哲学書電子化計画、巻下 26)

もっとも、 $x = 23 + 105t$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ) はすべて解なのだから、105を引かなくても128, 233はこの問題の解なのである。

この問題は日本に伝わって「百五減算」(吉田光由：「塵劫記」第十三)として知られている。なお、13世紀、南宋の秦九韶は1次合同式を拡張された Euclid 互除法で解くことでこの定理と同等の結果を得ている(竹之内, 2012)。

その方法を検証する。孫子算経の問題は  $x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, x \equiv 2 \pmod{7}$  と1次合同式で表される。ここで3と35(=5×7)、5と21(=3×7)、7と15(=3×5)は互いに素だから

$$(m, n) = (3, 35), (5, 21), (7, 15) \text{ とおいたと}$$

き不定方程式  $am + bn = 1$  の特殊解はいわゆる“拡張された Euclid 互除法”でそれぞれ求められる。

例えば、 $m = 3, n = 35$  の場合は互除法で

$$35 = 11 \times 3 + 2 \quad 3 = 1 \times 2 + 1$$

となる。これを逆に式変形して不定方程式の特殊解を求める算法が“拡張 Euclid 互除法”である。

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 1 \times 2 = 3 - 1 \times (35 - 11 \times 3) \\ &= 12 \times 3 + (-1) \times 35 \end{aligned}$$

$$\therefore (a, b) = (12, -1) \text{ は特殊解である。}$$

同様にすれば  $(m, n) = (5, 21), (7, 15)$  の

場合はそれぞれ特殊解は

$$(a, b) = (-4, 1), (-2, 1) \text{ となる。}$$

$$(-4) \times 5 + 1 \times 21 = 1, (-2) \times 7 + 1 \times 15 = 1$$

$$-35 \equiv 1 \pmod{3}, 21 \equiv 1 \pmod{5}, 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

ことが分かる。他方

$$-35 \equiv 0 \pmod{5}, -35 \equiv 0 \pmod{7}, 21 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$21 \equiv 0 \pmod{7}, 15 \equiv 0 \pmod{3}, 15 \equiv 0 \pmod{5}$$

すると

$$-35 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 \equiv 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 2 = 2 \pmod{3}$$

$$-35 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 \equiv 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 2 = 3 \pmod{5}$$

$$-35 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 \equiv 0 \times 2 + 0 \times 3 + 1 \times 2 = 2 \pmod{7}$$

したがって、 $-35 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 = 23$  は特殊解となり、一般解は  $23 + 105t$  となる。

以上の方法が秦九韶の方法である。これは19世紀に一宣教師によってヨーロッパに伝えられた。また、これは Gauss の「算術研究」(Disquisitiones Arithmeticae) に述べられた前述の定理の証明の方法と同じである。

以上のように、合同式を理解すると数の世界の探索がずいぶん広がることが分かる。この問題は合同式や Euclid の互除法など「数学 A」の整数の性質のところの発展的な教材になるであろう。

### 4 幾何からの素材例

アルベロス図形と算額問題に潜む数理を考察する。まず、「アルベロス」は Archimedes の“靴屋のナイフ (leather-worker’s knife)”の問題に由来する。

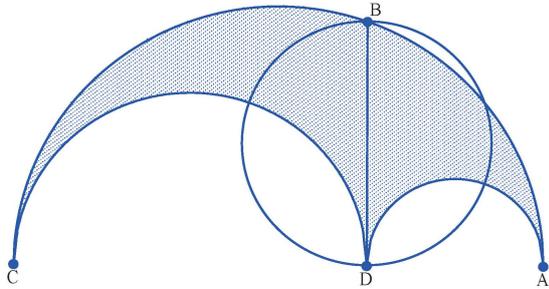


図1 アルベロス図形

図1で弧 ABCDA に囲まれた黄色部分の面積は点 D で線分 AC に垂直な線分 BD を直径とする円の面積に等しいというものである。これは簡単な計算で確かめられる。

Pappus の著書 (I.Thomas,1941) には、“アルベロスの円環問題”「中心HからAΓへの垂線はHについての円の直径に等しく、 $\theta$ からの垂線は $\theta$ についての円の直径の2倍に等しく、Kからの垂線は3倍に等しい。残りの垂線は、限りなく生ずる円の内接によって単一に増加する円列の順番に従って、順序正しくそれと同数倍の適当な円の直径に等しい」が掲載されている。この図形の配置を作図すると図2のようになる。

垂線の長さは円C1の場合は直径と同じ、円C2の場合は直径の2倍、円C3の場合は直径の3倍、・・・となる。

この命題の証明は反転を用いると簡単に証明できる。図3で、大円Aは反転円で、小円O及びO2は反転円の中心Aを通るように配置する。

反転円の中心を通る円はABに垂直な直線に写像されるから、小円O、O2の反転像

はそれぞれ直線L1,L2になる。

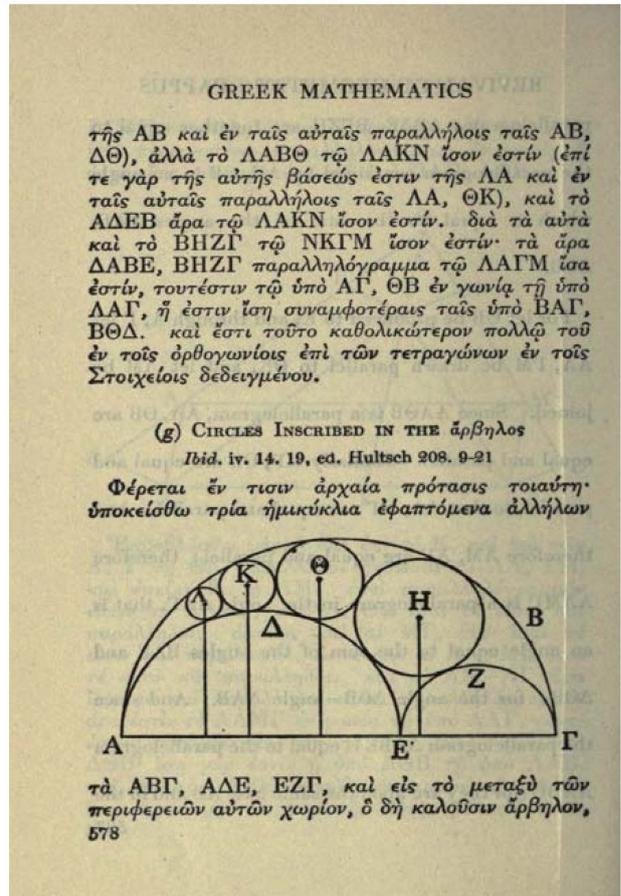


写真1 アルベロスの円環問題

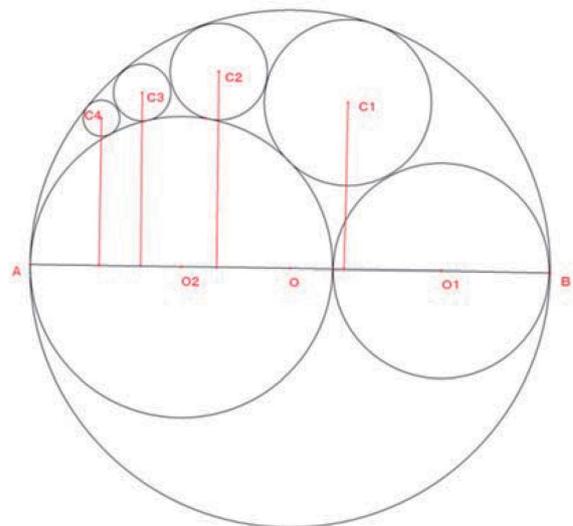


図2 アルベロス円環図形

アルベロスの内接円群O1,C1,C2,・・・は小円O及びO2に挟まれた領域内にあり、それらの反転像は直線L1,L2に挟まれた領域

内に写像され、それぞれ等円  $O1', C1', C2', \dots$  になる。

その根拠は、反転円の内部にある円で反転円の中心を内部に含まない円は、反転円の外部の円に写像されるからである。

図から、例えば円  $C2$  と円  $C2'$  は点  $A$  を中心とした相似の位置にある。

線分  $C2'O1'$  の長さは等円の直径の 2 倍である。したがって、円  $C2$  から線分  $AB$  に下

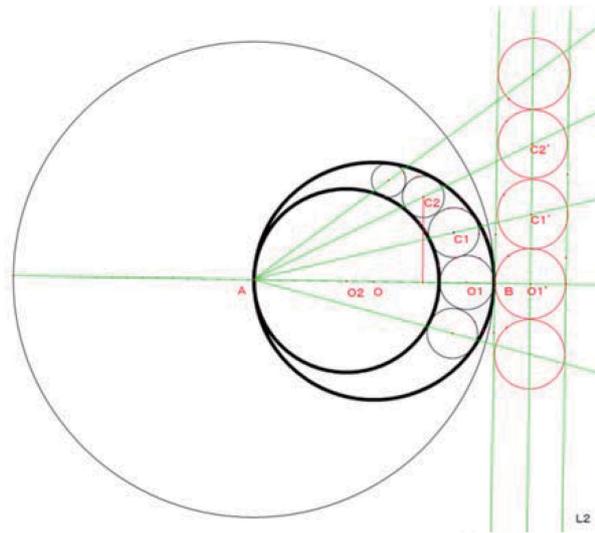


図 3 円環図形を反転した図形 (赤色)

した垂線の長さは円  $C2$  の直径の 2 倍となる。他の内接円についても同様に証明できる。

なお、反転については、複素数平面上での具体例で確かめておくことは有益であろう。

図 2 で点  $A$  を原点とし、直線  $AB$  を実数軸、点  $A$  で垂線を立てそれを虚数軸とする。

例えば、大円  $A$ 、円  $O$ 、円  $O2$  をそれぞれ

$$|z|=6 \quad |z-3|=3 \quad , \quad |z-2|=2 \quad \text{とする。}$$

反転の中心が原点だから、反転は

$$w=36/\bar{z} \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{で与えられる。}$$

円  $O$  を  $\textcircled{1}$  で変換すると  $\left| \frac{36}{w} - 3 \right| = 3$

簡約すると  $w + \bar{w} = 12$   $w = x + yi$  とおけば  $x = 6$  これが直線  $L1$  である。

同様にすれば、円  $O2$  は  $x = 9$  これが直線  $L2$  である。

アルベロスの内接円  $O1$  は、 $|z-5|=1$

これを  $\textcircled{1}$  で変換すると

$$(36-5w)(36-5\bar{w}) = w\bar{w}$$

$$x^2 + y^2 + 15x + 54 = 0$$

$$\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{中心} \left(\frac{15}{2}, 0\right) \quad \text{半径}$$

$\frac{3}{2}$  の円  $O1'$  となる。これは「数学Ⅲ」の複素数平面での発展的教材になる。

次に、「算額」の円環問題を考察する。写真 2 は川越八幡神社にある算額である。問題は以下の通りである。

「今有如図円内容源円及累円 及不動寄隅 仮画六切 其外円径若干間随容円数得至止 円径術如何 答曰 如左術術曰以容円数除外 円径得至火止円径合間」この現代語訳は

「今図の如く外円に源円を内接させ両円に接し、互いに接する累円を入れる。仮に六個を画く。外円径を与えたとき、止円径の最大を容円数に従って求める方法を問う」

「答に曰く左術の如し。術に曰く容円数を以て外円径を除すれば至大止円径を得て間に合す」となる。



写真 2 川越の算額と和算家企画展川越市立博物館

すなわち 止円径の最大値=外円径÷容円数がこの問題の解というのである。

図 3 で考える。外円を円  $O$ 、源円を円  $O_2$ 、累円を  $O_1, C_1, C_2, \dots$  とする。反転円をアルベロス図形と同じように円  $A$  とする。累円数を  $n = 2m$  とおく。外円と源円との接点  $A$  を通る両円の直径を  $AB, AC$  とする。  $AB = a, AC = t$  とおくと  $0 < t < a$  累円の中心を  $C_1, C_2, C_3, \dots; E_1, E_2, E_3, \dots$  とし、止円

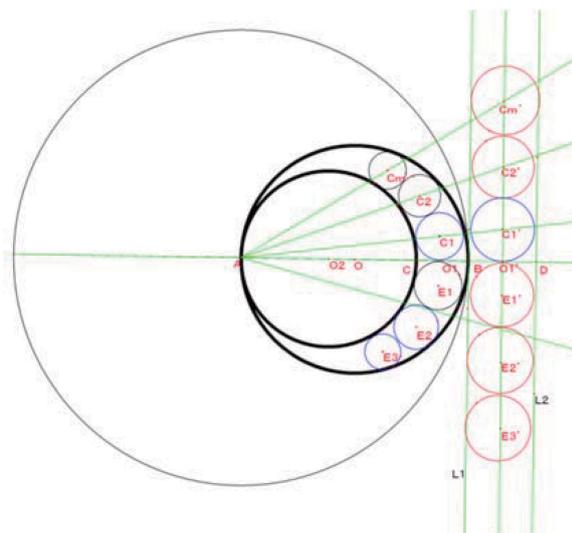


図 4 反転円の円環列を  $C_m, E_m$  とする。

これらを反転円  $A$  で反転して得た円を  $C_1', C_2', \dots, C_m'; E_1', E_2', \dots, E_m'$  とする。

$C_i', E_i'$  の半径を  $R$  とする。  $AC \cdot AD = a^2$

$$\text{より } AD = \frac{a^2}{t} = a + 2R$$

これより

$$R = \frac{a}{2} \left( \frac{a}{t} - 1 \right) = \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{a} \right)$$

$O_1'$  を線分  $BD$  の中点とすると、

$$AO_1' = a + R = \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{a} \right)$$

他方、  $C_m' O_1' = (2m - 1)R$

また、円  $C_m$  の半径を  $r$  とおく。円  $C_m$  と反転円  $C_m'$  は相似の位置にあるから(図 5)  $AC_m : AC_m' = r : R$  他方点  $C_m$  を反転した点を  $N$  とおく。また、点  $P$  を反転した点を  $P'$  とし、直線  $AP$  が円  $C_m$  の接線ならば点  $P'$  は円  $C_m'$  の接点である。

$$\text{ここで } AN \cdot AC_m = a^2$$

$$AC_m' = AN + NC_m'$$

$$AP \cdot AP' = a^2 = AC_m \cdot AN$$

$$AP : AC_m = AN : AP'$$

三角形  $APC_m$  と三角形  $ANP'$  は相似となり、  $\angle ANP'$  は直角である。

よって、三角形  $AP'C_m'$  と三角形  $P'NC_m'$  は相似となり

$$P'C_m' : NC_m' = AC_m' : C_m'P'$$

$$P'C_m' = R \text{ だから } AC_m' \cdot NC_m' = R^2$$

$$r = \frac{AC_m}{AC_m'} R = \frac{a^2}{AC_m' \cdot (AC_m' - NC_m')} R$$

$$= \frac{a^2}{AC_m'^2 - AC_m' \cdot NC_m'} \cdot R \quad \dots \textcircled{1}$$

三角形  $AC_m'OI'$  は直角三角形だから

$$AC_m'^2 = AOI'^2 + C_m'OI'^2 \text{ が成り立つ。}$$

$2m = n$  と記すと①の分母は次式となる。

$$(a + R)^2 + (n-1)^2 R^2 - R^2$$

$$= (n-1)^2 R^2 + 2aR + a^2$$

$$= \frac{(n-1)^2 a^4}{4} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right)^2 + a^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{a}\right) + a^2$$

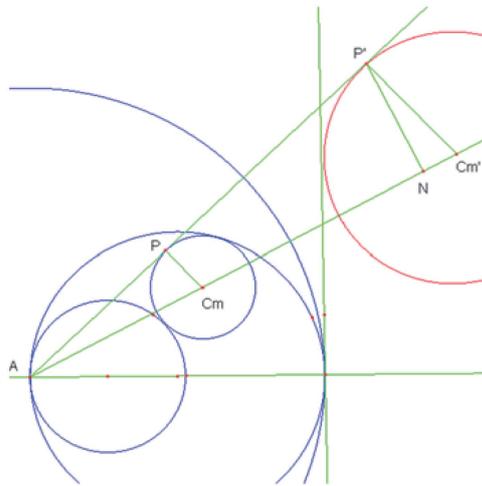


図5 円とその反転円

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{a} = x \text{ とおく。 } x > 0$$

止円  $C_m$  の直径は  $2r$  であるから

$$2r = 2 \cdot \frac{a^4 x}{2 \left\{ \frac{(n-1)^2 a^4}{4} x^2 + a^3 x + a^2 \right\}}$$

この式を  $f(x)$  とおく。

$$f'(x) = \frac{\left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{(n-1)^2}{4} x^2 \right\}}{\left\{ \frac{(n-1)^2}{4} x^2 + \frac{1}{a} x + \frac{1}{a^2} \right\}^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ より } x = \frac{2}{a(n-1)}$$

増減表で調べれば、この  $x$  の値のとき極大になる。この直径が止円の直径が最大となるときである。

$$f\left(\frac{2}{a(n-1)}\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{a(n-1)}}{\frac{(n-1)^2}{4} \cdot \frac{4}{a^2(n-1)^2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{a(n-1)} + \frac{1}{a^2}}$$

$$= \frac{2}{a(n-1)} \cdot \frac{a^2(n-1)}{2n} = \frac{a}{n}$$

したがって、止円の直径の最大値は 外円径 ÷ 累円の個数 となる

アルベロス図形や算額図形の作者は、どのようにして図形の性質を見つけたのだろうか？和算には証明という考えがなかった。様々な具体例で推測し、帰納的に命題が成り立つことに確信を深めていったに違いない。この問題では作図の正確さを期して幾何学ソフトを活用したが、点  $C_m$  を反転した点は  $C_m$  とは異なる点  $N$  になることが分かる。

なお、この教材を使った授業実践(保坂, 2001)では、学習者の数学観の変容が確認されたと報告されている。

## 5 円錐曲線からの素材例

Blaise Pascal(1623-1662)は 12 歳の時、独力で三角形の内角の和が 2 直角であることを見つけた。そんな少年に喜んだ父親はユークリッド幾何学原本を与え、数学や古典語、哲学を教えた。16 歳の時「円錐曲線試論」を完成し、その中に Pascal の定理が含まれていた。Descartes は 16 歳の少年の作であることを信じ得なかったといわれる。

高校生の頃、著者はその定理の美しさと同年代の少年が発見したことに強い感動を覚えた。Pascal の定理は、円に内接する六角形の場合が有名だが、高校数学の主役である 2 次関数はもとより分数関数、楕円、退化した 2 直線などの円錐曲線でも成り立つ。

そこで、円錐曲線における Pascal の定理の射影幾何的な証明と円錐曲線は二次曲線となる証明を考察する。

まず、次の円の Pascal の定理を考える。「円周上に  $A, B, C, D, E, F$  の点を取ったとき相対する辺  $AB$  と  $DE$ 、 $BC$  と  $EF$ 、 $CD$  と  $FA$  の交点は一直線 (Pascal 線) 上にある」

図 6 は円周上の点列が ABC 順に並んでいる場合だが、ランダムな点列の場合でも図 7 のように成り立つ。

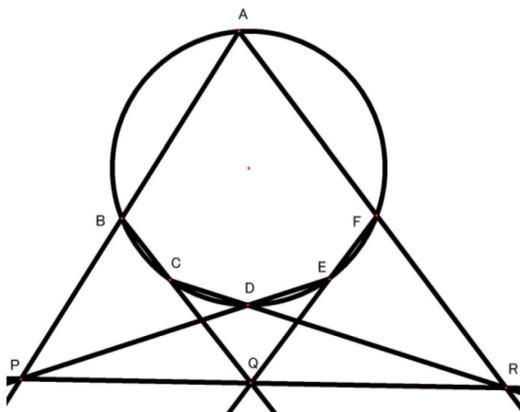


図 6 Pascal の定理 (円)

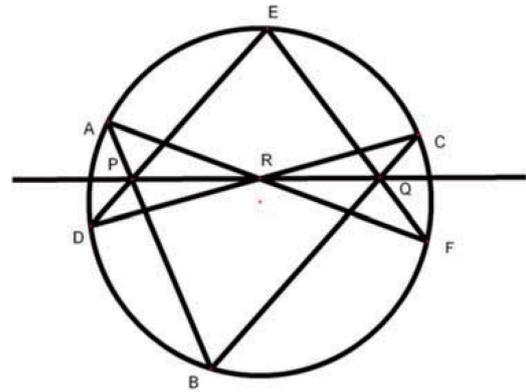


図 7 Pascal の定理 (ランダムな点の場合)

まず、幾何的な証明を考察する。

補助円を用いて中心が点  $Q$  の 2 つの相似な位置関係にある三角形を見出し  $P, Q, R$  の共線を示せばよい。(図 7)

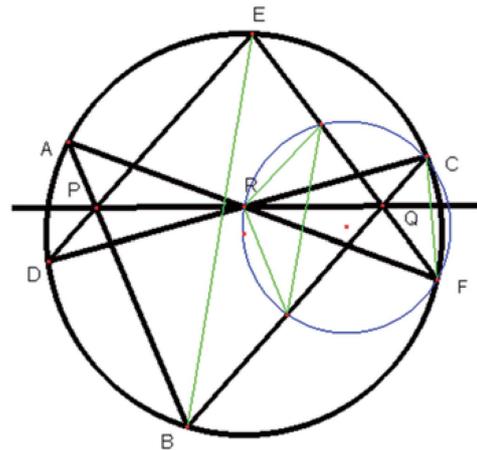


図 8 Pascal の定理の証明図

3 点  $C, F, R$  を通る円が  $BC, EF$  と交わる点を  $K, L$  とおく。

$$\angle KRF = \angle BAF$$

(円周角が等しい) よって、 $AB \parallel RK$

$$\text{同様に } \angle LRC = \angle EDC \quad DE \parallel RL$$

また、 $\angle LKC = \angle EBC \quad BE \parallel KL$

したがって、 $\triangle PBE \sim \triangle RKL$

対応する 3 頂点を結ぶ 3 直線  $BK, EL, PR$  は相似の中心  $Q$  を通る。

すなわち、 $P, Q, R$  は共線となる。

次に、複素数平面上で考察する。

図 5 で頂点  $A, B, C, D, E, F$  にそれぞれ複素数  $\zeta_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ )、交点  $P, Q, R$  に複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  を対応させる。また、円は単位円と仮定する。  $|\zeta_i|=1$

直線  $AB$  の複素数表示の方程式は

$$\frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} \in \mathbb{R} \quad \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} = \frac{\overline{z - \zeta_1}}{\overline{z - \zeta_2}} = \frac{\bar{z} - \bar{\zeta}_1}{\bar{z} - \bar{\zeta}_2}$$

$$(z - \zeta_1)(\bar{z} - \bar{\zeta}_2) = (\bar{z} - \bar{\zeta}_1)(z - \zeta_2)$$

$$(\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_2)z - (\zeta_1 - \zeta_2)\bar{z} = \bar{\zeta}_1\zeta_2 - \zeta_1\bar{\zeta}_2$$

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} = \zeta_1\zeta_2 \quad \frac{\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 - \zeta_1\zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2} = \zeta_1 + \zeta_2$$

が成り立つことを用いて変形すると

$$z + \zeta_1\zeta_2\bar{z} = \zeta_1 + \zeta_2 \quad \text{①} \quad \text{同様に、直線}$$

$$DE \text{ の方程式 } z + \zeta_4\zeta_5\bar{z} = \zeta_4 + \zeta_5 \quad \text{②}$$

直線  $AB, DE$  の交点  $P(\alpha)$  を求める。

$$\begin{aligned} & \text{①、②から } \bar{z} \text{ を消去すると} \\ \alpha &= \frac{\zeta_1\zeta_2(\zeta_4 + \zeta_5) - \zeta_4\zeta_5(\zeta_1 + \zeta_2)}{\zeta_1\zeta_2 - \zeta_4\zeta_5} \\ &= \frac{\overline{\zeta_4 + \zeta_5} - \overline{\zeta_1 + \zeta_2}}{\zeta_4\zeta_5 - \zeta_1\zeta_2} \end{aligned}$$

同様に

$$\beta = \frac{\overline{\zeta_5 + \zeta_6} - \overline{\zeta_2 - \zeta_3}}{\zeta_5\zeta_6 - \zeta_2\zeta_3}$$

$$\gamma = \frac{\overline{\zeta_1 + \zeta_6} - \overline{\zeta_3 - \zeta_4}}{\zeta_1\zeta_6 - \zeta_3\zeta_4}$$

$\alpha - \gamma$

$$\begin{aligned} & \frac{(\overline{\zeta_4 + \zeta_5} - \overline{\zeta_1 + \zeta_2})(\overline{\zeta_5\zeta_6} - \overline{\zeta_2\zeta_3}) - (\overline{\zeta_5 + \zeta_6} - \overline{\zeta_2 - \zeta_3})(\overline{\zeta_1\zeta_6} - \overline{\zeta_3\zeta_4})}{(\zeta_4\zeta_5 - \zeta_1\zeta_2)(\zeta_5\zeta_6 - \zeta_2\zeta_3)} \\ &= \frac{(\overline{\zeta_4 - \zeta_1})(\overline{\zeta_5\zeta_6} - \overline{\zeta_2\zeta_3}) - (\overline{\zeta_5 + \zeta_6} - \overline{\zeta_2 - \zeta_3})(\overline{\zeta_1\zeta_6} - \overline{\zeta_3\zeta_4})}{(\zeta_4\zeta_5 - \zeta_1\zeta_2)(\zeta_5\zeta_6 - \zeta_2\zeta_3)} \end{aligned}$$

$\beta - \gamma$

$$\begin{aligned} & \frac{(\overline{\zeta_6 - \zeta_3})(\overline{\zeta_1\zeta_6} - \overline{\zeta_3\zeta_4}) - (\overline{\zeta_5\zeta_6} - \overline{\zeta_2\zeta_3})(\overline{\zeta_1\zeta_6} - \overline{\zeta_3\zeta_4})}{(\zeta_5\zeta_6 - \zeta_2\zeta_3)(\zeta_1\zeta_6 - \zeta_3\zeta_4)} \\ &= \frac{(\overline{\zeta_6 - \zeta_3})(\overline{\zeta_1\zeta_6} - \overline{\zeta_3\zeta_4}) - (\overline{\zeta_5\zeta_6} - \overline{\zeta_2\zeta_3})(\overline{\zeta_1\zeta_6} - \overline{\zeta_3\zeta_4})}{(\zeta_5\zeta_6 - \zeta_2\zeta_3)(\zeta_1\zeta_6 - \zeta_3\zeta_4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} &= \frac{(\overline{\zeta_4 - \zeta_1})(\overline{\zeta_5\zeta_6} - \overline{\zeta_2\zeta_3})}{(\overline{\zeta_6 - \zeta_3})(\overline{\zeta_4\zeta_5} - \overline{\zeta_1\zeta_2})} \\ &= \frac{\overline{\zeta_1\zeta_4}(\overline{\zeta_4 - \zeta_1})(\overline{\zeta_5\zeta_6} - \overline{\zeta_2\zeta_3})}{\overline{\zeta_3\zeta_6}(\overline{\zeta_6 - \zeta_3})(\overline{\zeta_4\zeta_5} - \overline{\zeta_1\zeta_2})} \\ &= \frac{(\zeta_4 - \zeta_1)(\zeta_5\zeta_6 - \zeta_2\zeta_3)}{(\zeta_6 - \zeta_3)(\zeta_4\zeta_5 - \zeta_1\zeta_2)} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \end{aligned}$$

$\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}$  は実数となるから  $\alpha, \beta, \gamma$  は一

直線上にある。  $P, Q, R$  は共線となる。

次に、円錐曲線の Pascal の定理を考える。

定点を通る 2 直線、例えば、

$$y = a(x - 1) + 2 \quad y = -\frac{1}{2a}(x - 3) + 4$$

の交点の軌跡は楕円となる。すなわち

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 19 = 0$$

射影幾何では、“点円錐曲線”を射影的関係にある 2 つの直線族の対応する 2 直線の交点の軌跡で定義する。点円錐曲線上に関する Pascal の定理は次のように表される(福原, 1985)。

「平面上の 6 つの点が同一点円錐曲線上の点であるための必要十分条件は、これらの点を頂点とする任意の六角形の相対する辺の交点が共線となることである」

この射影幾何での証明が次の通りである。

$S_0$ を通る直線族（線束といい  $\langle S_0 \rangle$  と記す）と  $S_1$  を通る直線族が 1 : 1 に対応する。これは線と線の射影対応で  $\langle S_0 \rangle \bar{\alpha} \langle S_1 \rangle \cdots \textcircled{1}$  と記す。  $S_0B \leftrightarrow S_1B$   $S_0C \leftrightarrow S_1C$   $S_0D \leftrightarrow S_1D$   $S_0S_1 \leftrightarrow S_1S_0$  で点  $S_0, S_1$  は交点だから曲線上にある。

点  $A$  は  $B, C, D, S_0, S_1$  以外の曲線上の任意の点とする。  $S_0C$  と  $BA$  は点  $C_0$ 、  $CS_1$  と  $AD$  は点  $C_1, S_1B$  と  $S_0D$  は点  $T$  で交わるとする。(図 9)

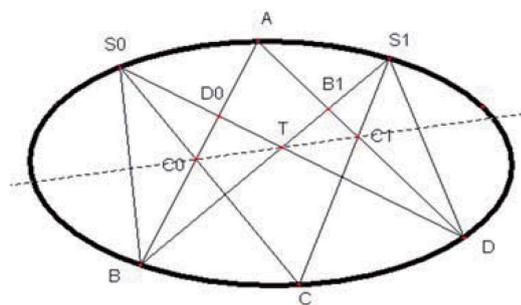


図 9 Pascal の定理(楕円)

直線  $AB$  は線束  $\langle S_0 \rangle$  と交わる（線束  $\langle S_0 \rangle$  を切断する）から、  $AB$  上の点 ( $\langle AB \rangle$  と記す) と  $\langle S_0 \rangle$  の要素である半直線は 1 : 1 に対応する。これは点と線の配景的対応といい  $\langle S_0 \rangle \bar{\alpha} \langle AB \rangle \cdots \textcircled{2}$  と記す。

同様に、直線  $AD$  は線束  $\langle S_1 \rangle$  を切断するから、  $AD$  上の点集合と  $\langle S_1 \rangle$  の要素である半直線は 1 : 1 に対応する。点と線の配景的対応であり  $\langle S_1 \rangle \bar{\alpha} \langle AD \rangle \cdots \textcircled{3}$

① ② ③より

$$\langle AB \rangle \bar{\alpha} \langle S_0 \rangle \bar{\alpha} \langle S_1 \rangle \bar{\alpha} \langle AD \rangle$$

$$\therefore \langle AB \rangle \bar{\alpha} \langle AD \rangle$$

こうして、直線  $AB$  上の点と直線  $AD$  上の点は 1 : 1 に対応する。この射影対応を  $\phi$  とおく。ところが、点  $A$  にはそれ自身に対応するから、  $\phi$  は点と点の配景的対応となる。この配景の中心は  $T$ （定点）である。

したがって、  $\phi(A) = A$ 、  $\phi(B) = B_1$ 、  $\phi(D_0) = D$ 、  $\phi(C_0) = C_1$  よって、  $C_0C_1$  は  $T$  で交わり、点  $C_0, C_1, T$  は共線となる。

逆に、  $C_0, C_1, T$  が共線と仮定する。直線  $BC_0$  と直線  $DC_1$  の交点を  $A$  とする。  $AB$  上の点と  $AD$  上の点は点  $C$  を変化させれば直線  $C_0C_1$  が変化し 1:1 に対応する(配景的対応)  $\therefore \langle AB \rangle \bar{\alpha} \langle AD \rangle$  がいえる。

また、  $\langle AB \rangle \bar{\alpha} \langle S_0 \rangle$ 、  $\langle AD \rangle \bar{\alpha} \langle S_1 \rangle$  を考えると  $\langle S_0 \rangle \bar{\alpha} \langle S_1 \rangle$  がいえる。よって、6つの点  $S_0, S_1, A, B, C, D$  は曲線上にある。この定理は双曲線、放物線、2直線の場合も証明されたことになる。(図 10~12)

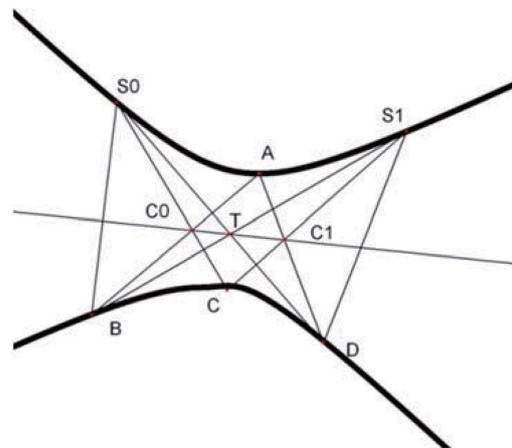


図 10 Pascal の定理(双曲線)

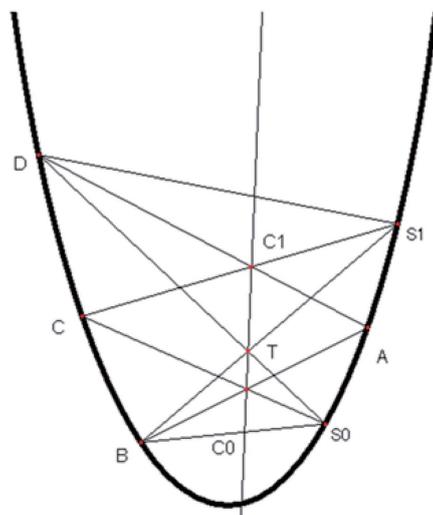


図 11 Pascal の定理(放物線)

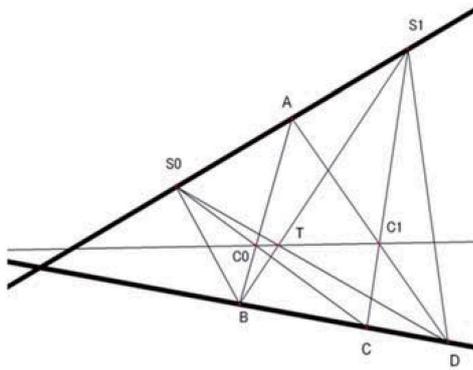


図 12 Pascal の定理(2 直線)

なお、5 点  $S_0, S_1, B, C, D$  決まれば定点  $T$  が決まり、 $T$  を中心に直線  $COC_1$  が回転すると点  $A$  の軌跡が点円錐曲線になるから、5 点が決まると円錐曲線は完全に決まる。

2 直線の場合の Pascal の定理は Pappos の定理として知られている。

次に、Pascal の定理の代数幾何的な表現並びに証明は以下のようなになる(三村,1956)。

「固有 2 次曲線 (楕円、放物線、双曲線) に内接する六辺形の相対する辺は次のいずれかを満たす。

(1) 相対する辺  $l_i, l'_i$  の交点  $P_i$  が三つ共に存在し、共線となる

(2) 一組の相対する辺、例えば  $l_1, l'_1$  は平行、 $P_2, P_3$  は存在し、直線  $P_2P_3$  が  $l_1$  と平行となる ( $P_1$  は無限遠点となるが、射影幾何では (1) に該当)

(3)  $l_i, l'_i$  はそれぞれ互いに平行となる (射影幾何では (1) に該当)

この証明は次のようになる。

図 12 のように 2 次曲線  $\Gamma$  に内接する 6 辺形を  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  とする。

直線  $A_iA_j$  の方程式を  $l_{ij}(x, y) = 0$  又は

$$l_{ij} = 0 \text{ と記す。 } P_1 = l_{12} \cap l_{45}, P_2 = l_{23} \cap l_{56}$$

$P_3 = l_{34} \cap l_{16}$  四角形  $A_1A_2A_3A_4$  の頂点を通る 2 次曲線  $\Gamma_\lambda$  を①とする。

$$l_{12}l_{34} + \lambda l_{23}l_{14} = 0 \quad \dots \text{①} \text{ とおく。}$$

$\Gamma$  上の点  $A_5(a, b)$  が①を満たすように

$$\lambda_0 (\neq 0) \text{ を定めると } \Gamma_{\lambda_0} : l_{12}l_{34} + \lambda_0 l_{23}l_{14} = 0$$

は  $\Gamma$  と 5 点で交わる。5 点を通る 2 次曲線は一つだから、 $\Gamma_{\lambda_0}$  は  $\Gamma$  の方程式になる。

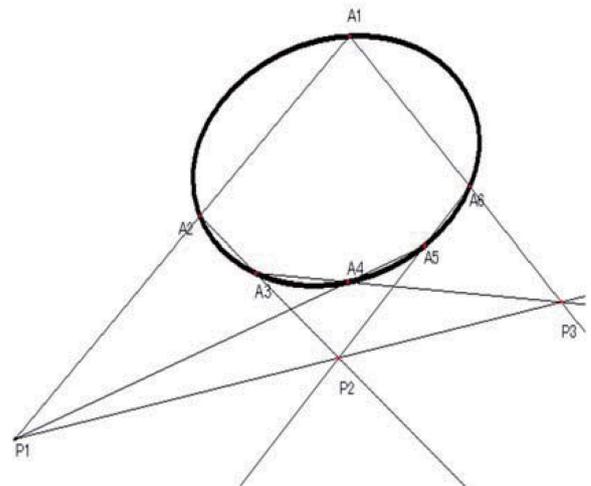


図 13 Pascal の定理(楕円)

同様に、四角形  $A_1A_4A_5A_6$  の頂点を通る 2 次曲線  $l_{45}l_{61} + \mu l_{56}l_{14} = 0 \dots \text{②}$

が  $\Gamma$  の方程式となるように  $\mu_0 (\neq 0)$  を定

める。 $\Gamma_{\mu_0}$  と  $\Gamma_{\lambda_0}$  は同じ方程式となる。

$$\therefore l_{12}l_{34} + \lambda_0 l_{23}l_{14} = k(l_{45}l_{61} + \mu_0 l_{56}l_{14}) \quad k \neq 0$$

$$l_{12}l_{34} - kl_{45}l_{61} = l_{14}(k\mu_0 l_{56} - \lambda_0 l_{23})$$

$l_{12}l_{34} - kl_{45}l_{61} = 0 \dots \textcircled{4}$ とおく。

2次曲線④は4点  $A_1, A_4, P_1, P_3$  を通る。

④から  $l_{14} = 0, k\mu_0 l_{56} - \lambda_0 l_{23} = 0 \dots \textcircled{5}$

$P_1, P_3$  は直線  $l_{14} = 0$  上にないから、⑤の上にある。よって、⑤は直線  $P_1P_3$  の方程式である。

もし、 $l_{23}$  と  $l_{56}$  の交点  $P_2$  が存在するなら、⑤を満たすので  $P_2$  は⑤を満たす。

よって、直線⑤は3点  $P_1, P_2, P_3$  を通る。

また、もし  $A_2A_3 \parallel A_5A_6$  ならば直線⑤はこれらと平行になる。

次に、点円錐曲線が2次曲線であることを確かめる。そのために、点円錐曲線を斜交座標面  $OX, OY$  上で考察する。

点円錐曲線を図14のように配置し、曲線上の点を配置する。点Aを原点とし、X軸  $OX$  上に点B、 $C_0$ 、Y軸  $OY$  上に点D、 $C_1$  を置く。点Cは動点である。なお、直線  $C_0TC_1$  は Pascal 線である。

$S_0(a, b), S_1(c, d), C_0(p, 0), C_1(0, q),$

$T(t, s), C(x, y)$  と座標を定める。

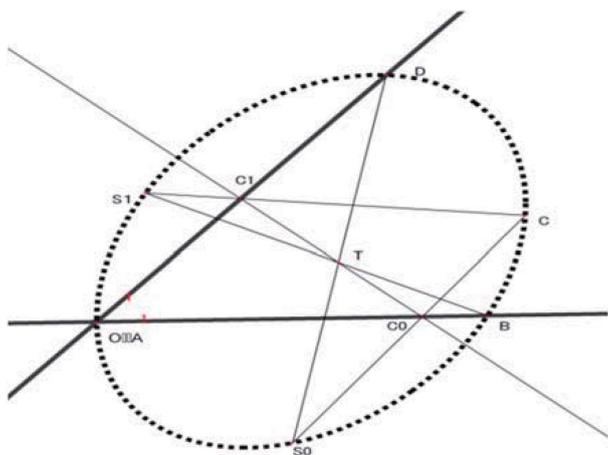


図14 点円錐曲線が2次曲線である証明図

直線  $C_0C_1$  は  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

点Tは Pascal の定理よりこの直線上に

あるから  $\frac{t}{p} + \frac{s}{q} = 1 \dots \textcircled{1}$

直線  $S_0C$  の方程式は  $y - b = \frac{-b}{p - a}(x - a)$

$p = \frac{-bx + ay}{y - b}$  直線  $S_1C_1$  の方程式は

$y - d = \frac{q - d}{-c}(x - c) \quad q = \frac{-cy + dx}{x - c}$

これを①に代入する

$$t(y - b)(cy - dx) + s(x - c)(bx - ay) + (bx - ay)(cy - dx) = 0$$

$$b(s - d)x^2 + c(t - a)y^2 + (ad + bc - dt - as)xy + (bdt - bcs)x + (acs - bct)y = 0$$

したがって、2次曲線となる。

共線となる Euclid 幾何学の命題は多い。垂心、重心、外心が共線となる Euler 線や外接円上の任意の点から三角形の3辺に下した点が共線となる Simson 線は有名である。

射影幾何では、線分の長さや角の大きさ、面積など図形の計量を無視し、“線上にある”、“点を通る”などに着目し、また普通の点と無限遠点とを同等に扱う射影平面で図形を考察する。このため、公理は簡単になるし命題や論理が明快になる。また、双対の原理が成り立つのが特徴であり、異なると思われる定理が統合的に理解される。例えば、Brianchon の定理と Pascal の定理は双対な命題となり、美しさを感じる。また、射影幾何的

な証明は代数幾何的な手法や複素数を用いた証明に比べると簡潔である。

### 6 解析からの素材例

面積は、体積や個数など「大きさ」を表す量として古来関心が払われてきた。積分を学ぶ導入として、いろいろな面積の求め方を体験することは面積（測度）の理解に有益であろう。以下は、面積のいろいろな工夫による歴史的な求め方を概観し、面積という量に対する理解を深める教材である。

まず、取り尽くし法、区分求積法で求める例について考える。

(1) 半径  $r$  の円

円を中心で  $n$  等分に輪切りし、展開した扇形の図形に内接する三角形の一つ  $OPQ$  は、

$$\Delta OPQ = \frac{1}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad OP = OQ = r$$

この面積の総和  $s(n)$  は

$$s(n) = \pi r^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) / \frac{2\pi}{n}$$

また、外接三角形  $\Delta OST$  は

$$\Delta OST = \frac{1}{2} \cdot OR \cdot ST = \frac{r}{2} \cdot 2r \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

この総和は

$$\begin{aligned} S(n) &= n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot r \\ &= \frac{\pi r^2}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

$$s(n) \leq S \leq S(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \pi r^2$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{ の証明を考察する。 (図 15)}$$

円弧  $\widehat{PQ}$  を  $n$  等分し折れ線  $\sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i$  を

つくる。  $P_0 = P, P_n = Q$

$$\angle POQ = x \text{ とおくと } P_{i-1}P_i = 2r \sin \frac{x}{2n}$$

$$\widehat{PQ} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \sin \frac{x}{2n} = rx \quad \frac{x}{2n} = \theta \text{ とおくと}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

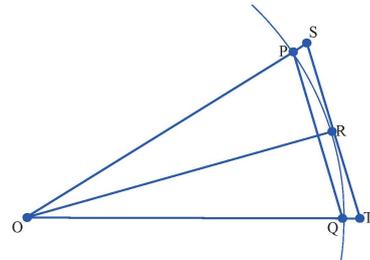


図 15 円弧の近似

(2) 放物線を境界に持つ図形

Archimedes (287? ~212B.C.)の“取り尽くし法”で求める。これは内接・外接する三角形の和で近似していく方法である。放物線  $y = -x^2$  と線分  $AB$  に囲まれた図形の面積  $S$  を考える。(図 16)

$$\Delta AOB = W \text{ とすれば } S = \frac{4}{3}W \text{ となる。}$$

2200 年も前にこのような方法が考案されたことに驚愕する。これ以後、中世の暗黒時代を経て 1500 年以上封印されていたのである。

三角形  $OAB$  をベースに 2 つの内接三角形を考えこの面積を計算する。

$AB = a \quad OC = b$  とおく。 $AB$  を 4 等分した点  $Q$  を取り、垂線  $QP$  を立てる。

$$\Delta AOB = \frac{1}{2}ab = W \text{ ところで } RQ = \frac{1}{2}b$$

$$CQ = \frac{a}{4} \quad OC = CB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} = b$$

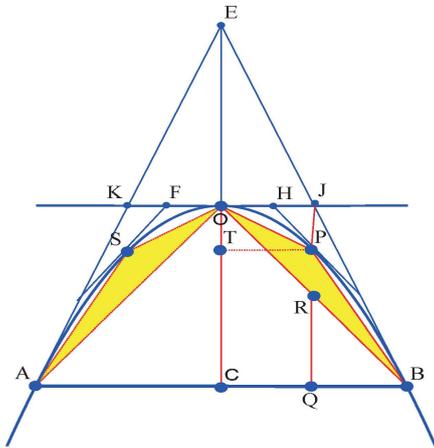


図 16 三角形による区分

$$OT = CQ^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$RP = OC - (OT + RQ) = b - \left(\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{b}{2}\right)$$

$$= b - \left(\frac{b}{4} + \frac{b}{2}\right) = \frac{b}{4}$$

$$\Delta POB = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{16}$$

したがって

$$\Delta POB + \Delta SOA = \frac{ab}{8} = \frac{1}{4}W = W_1$$

次に、三角形  $POB, SOA$  をベースに、4 つの内接三角形の面積の和を考える。同様の計算によって、

$$W_2 = \frac{1}{4} \Delta POB + \frac{1}{4} \Delta SOA = \frac{1}{4}W_1 = \frac{1}{4^2}W$$

以下、 $\frac{1}{4^3}W, \frac{1}{4^4}W, \dots$

よって、内側から内接する三角形の総和は

$$W + \frac{1}{4}W + \frac{1}{4^2}W + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}W = \frac{4}{3}W$$

別解として、“挟み撃ち”法で求める。点 A での接線と EC との交点 E をとれば、放物線の性質より  $EO=CO$  となる。よって、 $\Delta EAB = 2 \Delta OAB$  となる。

同様に考えれば、 $\Delta OBJ = 2 \Delta POB$ 、 $\Delta OAK = 2 \Delta SOA$  がいえ、

$$\Delta OAB + \Delta POB + \Delta SOA < S < \text{台形 } KABJ = \Delta OAB + \Delta OBJ + \Delta OAK$$

$$\text{つまり } W + W_1 < S < W + 2W_1 = W + W_1 + W_1$$

$$W_2 = \frac{1}{4}W_1 = \frac{1}{4^2}W \quad W_n = \frac{1}{4}W_{n+1}$$

$$W + W_1 + W_2 + \dots + W_n < S < W + W_1 + W_2 + \dots + W_n + W_n$$

$$W \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n}\right) < S < W \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right)$$

$$\frac{4}{3}W \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) < S < \frac{4}{3}W \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) + \frac{W}{4^n}$$

$$\frac{-W}{3 \cdot 4^n} < S - \frac{4}{3}W < \frac{2W}{3 \cdot 4^n}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } S \rightarrow \frac{4}{3}W$$

(3) 双曲線を境界に持つ図形

Brouncker (1620~1684) が考案した方法で求める。

双曲線  $y = \frac{1}{x}$  と  $x=1, x=2, y=0$  で囲

まれた図形の面積を求める。

$1 \leq x \leq 2$  を 1 等分、 $2^1$  等分、 $2^2$  等分、 $\dots$  してできる長方形をそれぞれ  $F_1; F_2; F_3; F_4; \dots$  とする。(図 17)

$$F_1 = \frac{1}{2} \quad F_2 \text{ は幅 } \frac{1}{2}$$

$$\text{高さ} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$F_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \cdot 4} \quad F_3 \text{ は幅が } \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{高さは} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{4}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 5}$$

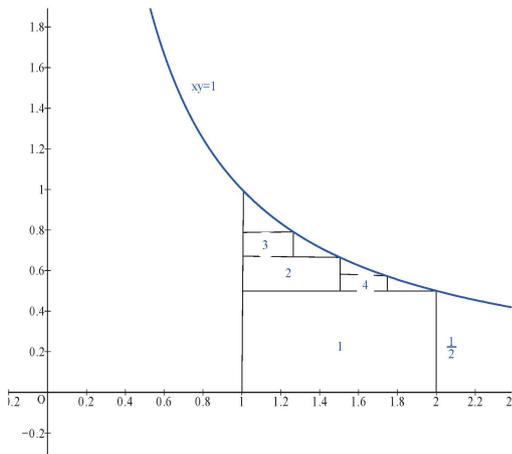


図 17 等比長方形による区分

$$F_3 = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5 \cdot 6} \quad F_4 = \frac{1}{7 \cdot 8}$$

求める面積は

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + \dots &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2 = 0.69315 \dots \end{aligned}$$

(4) 放物線で囲まれた図形

16 世紀になって、Galileo (1564~1642) の弟子 Cavalieri (1598~1647) は区分求積法を考案した。これは取り尽くし法の自然な延長である。

$y = x^2, x = 2, y = 0$  で囲まれた図形の面

積  $S$  を求める。(図 18) 区間  $[1, 2]$  を  $n$  等

分し、面積を  $n$  個に分けて区間  $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

での長方形の和の面積  $S(k)$  を不等式で表す。

区間の左端で最小、右端で最大となるから

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq S(k) \leq \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k+1}{n}\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} S(k) = S \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{k+1}{n}\right)^2$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \leq S \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \leq S \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $S \rightarrow \frac{1}{3}$  となる。

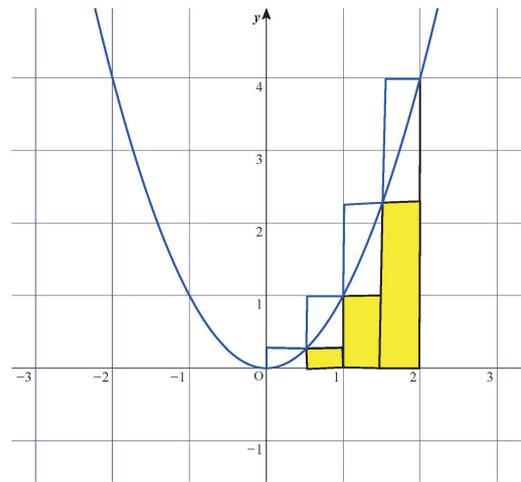


図 18 長方形による区分

区分求積法の考え方は、“線は無限個の点からなり、面は無限個の線よりなり（縦線集合）、立体は無限個の面からなる” というも

のである。

この考えから、Cavarieli の原理「二つの平面図形を一定方向に平行線で切り取るとき、一つの平行線が二つの図形から切り取る部分の長さがつねに同じならば、二つの図形の面積は等しい。」ことが提唱された。立体図形に適用すれば球と円錐の体積が円柱の体積になることが簡単な計算で確認できる。

(5)  $y = x^k (k \neq -1), x = 2$  ,  $x$  軸で囲まれた図形 ((4) の一般化)

これには Fermat (1601~1665) の方法がある。 $0 < \rho < 1$  として、区間  $[0, 2]$  を

$x = 2$  から左に  $2, 2\rho, 2\rho^2, 2\rho^3, \dots, 2\rho^n, \dots$  と等比数列の分点をとる。分点で垂線を立て、長方形をつくる。右端の内接長方形の面積は

$$(2 - 2\rho)(2\rho)^k = 2^{k+1} \rho^k (1 - \rho)$$

次の左の長方形、またさらに次の長方形・・・の面積は以下ようになる。

$$(2\rho - 2\rho^2)(2\rho^2)^k = 2^{k+1} \rho^{2k+1} (1 - \rho)$$

$$(2\rho^2 - 2\rho^3)(2\rho^3)^k = 2^{k+1} \rho^{3k+2} (1 - \rho), \dots$$

$$(2\rho^{n-1} - 2\rho^n)(2\rho^n)^k = 2^{k+1} \rho^{nk+n-1} (1 - \rho), \dots$$

辺々加えた無限和を考える。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k+1} \rho^{nk+n-1} (1 - \rho) &= 2^{k+1} (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} (\rho^{k+1})^n \rho^{-1} \\ &= 2^{k+1} (1 - \rho) \frac{\rho^k}{1 - \rho^{k+1}} \end{aligned}$$

分割を細分するため  $\rho \rightarrow 1$  とする。

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} 2^{k+1} (1 - \rho) \frac{\rho^k}{1 - \rho^{k+1}}$$

$$= 2^{k+1} \lim_{\rho \rightarrow 1} \rho^k \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho}} = \frac{2^{k+1}}{k + 1}$$

次に、外接長方形の和を求める。

$$\begin{aligned} (2 - 2\rho)2^k &= 2^{k+1} (1 - \rho), (2\rho - 2\rho^2)(2\rho)^k \\ &= 2^{k+1} \rho^k (1 - \rho), \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\rho^{n-1} - 2\rho^n)(2\rho^{n-1})^k \\ &= 2^{k+1} \rho^{nk+n-k-1} (1 - \rho) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k+1} \rho^{nk+n-k-1} (1 - \rho) &= 2^{k+1} (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} (\rho^{k+1})^n \rho^{-k-1} \\ &= 2^{k+1} \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{k+1}} = 2^{k+1} \cdot \frac{1}{\frac{1 - \rho^{k+1}}{1 - \rho}} \rightarrow \frac{2^{k+1}}{k + 1} \end{aligned}$$

長方形や三角形の面積は容易に測れる。取り尽くし法や区分求積法は、曲線に外接または内接する重ならない長方形(円の場合は三角形)の有限個の和の極限值をもって面積と考えた。Jordan (1838~1922)はこの外接、内接する長方形の和の下限、上限をそれぞれ外測度、内測度とし、それらが一致するときその値を Jordan 測度という。(1)~(5)で求めた面積は Jordan 測度になる。長方形を使った区分求積法で面積が測れる図形は Jordan 可測である。Jordan 測度  $J$  は Jordan 可測な集合に定義され、非負実数値を対応させる集合関数であり、次の2つを満たすものとする。

(1)  $J(A) \geq 0 \quad J(\phi) = 0 \quad \phi : \text{空集合}$

(2)  $A \cap B = \phi$  ならば、

$$J(A \cup B) = J(A) + J(B)$$

この2つが、「面積とは何か？」という問いへの答えである。ただし、Jordan 可測で

ない点集合、例えば $[0,1]$ の有理点の集合  $A$  の外測度は1、内測度は0となる。こうして、Lebesgue (1875~1941) は Lebesgue 測度論を確立し、それをベースにより柔軟で強力な積分論が展開されることになる。

次に、S.M.Ulam(1909~1984)の考案した Monte Carlo 法を用いて図形の求積を考える。いま、 $F = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  とおき、これを曲線  $y = x^2$  で2つの部分 (正領域、負領域) に分ける。この領域  $F$  に無作為に  $N$  個の点をばら撒くと、領域の面積の大きさに比例して、一様に分布する。領域  $F'$  に落ちる標本点の個数を  $f$  とすれば比例関係  $F : F' = N : f$  が成り立つ。これから  $F' = \frac{f}{N} \cdot F$  これを用いて面積を“測る”ことができる。標本点は、乱数サイまたは EXCELL 関数 RAND()で発生させた疑似乱数使う。(表1) そこで、負領域  $y = x^2, x = 1, x$  軸で囲まれた面積を求める。

まず、乱数サイの利用から述べる。乱数サイは正20面体の表面に0から9までの数が2つずつ記してある。これを2個投げて、出た目を  $a, b$  とすると小数  $0.ab$  が定まる。これを  $x$  座標とする。同様に、 $y$  座標  $0.cd$  を求めれば点  $(0.ab, 0.cd)$  が決まる。こうして正方形  $F$  内に点を  $N$  個ランダムに定め、負領域  $\{(x,y) | y \leq x^2\}$  に落ちた点の個数が  $f$  個とすれば、求める面積は  $\left(\frac{f}{N}\right) \times$  (正方形の面積)となる。 $N = 20$  として計算する。

なお、面積計 (プランメータ) の活用や図形を厚紙に張り付けそれを切って重さを量る実用的な方法も考えられる。これらの方法は、複雑な曲線で囲まれた図形の面積を求める実用的なメリットがあることを教えたい。

	x	y	x二乗	y-x2	
1	0.73	0.38	0.5329	-0.153	1
2	0.03	0.99	0.0009	0.9891	
3	0.72	0.64	0.5184	0.1216	
4	0.93	0.18	0.8649	-0.685	1
5	0.03	0.64	0.0009	0.6391	
6	0.47	0.66	0.2209	0.4391	
7	0.73	0.21	0.5329	-0.323	1
8	0.49	0.88	0.2401	0.6399	
9	0.55	0.48	0.3025	0.1775	
10	0.8	0.56	0.64	-0.08	1
11	0.3	0.33	0.09	0.24	
12	0.97	0.34	0.9409	-0.601	1
13	0.96	0	0.9216	-0.922	1
14	0.03	0.74	0.0009	0.7391	
15	0.64	0.87	0.4096	0.4604	
16	0.69	0.84	0.4761	0.3639	
17	0.63	0.08	0.3969	-0.317	1
18	0.68	0.82	0.4624	0.3576	
19	0.75	0.6	0.5625	0.0375	
20	0.81	0.83	0.6561	0.1739	
				グラフ下	7
				面積	0.35

表1 乱数を用いた面積の求め方

### 7 特別教育の課題

発展的な数学教材を用いて能力の高い生徒を指導する際の課題を考察する。

第一に、自主的な数学的活動の促進について

てである。課外の時間に自主的に数学的活動を行うようなグループを組織し、その活動に適切な指導助言を行うことが考えられる。この活動は、数学サークルのようなイメージであり、実際にこの活動を行い成果を上げた報告がある（岡崎、2013）。この中で、ゼミ形式で数学の本の輪講したり、主体的に問題を発見し、その解決に向けて探究活動や数学化・応用活動を言語活動を通して行っていくことが期待される（林、2012）。

第二に、発展的教材の開発である。生徒の興味や関心を引き出し、能力を伸ばすための教材を工夫する。このため、数学に対する広く深い理解とバランスの取れた知見、教材開発に対する不断の研鑽が必要となる。

第三に、数学ソフトウェアの効果的な活用である。関数ソフトや幾何ソフトを活用して問題解決する力を育成するため、事象の数学化でパラメータを見付け、これを動かしながら、グラフや図形の動き、変化を観察することにより法則性を発見する探究法を学ばせる必要がある。そのため、数学ソフトの活用法を習得できるソフト教材の開発や指導技術の向上が必要である（林、2013）。

第四に、開発した教材の公開と活用である。自作の教材について情報交換を互いに行って活用していく必要がある。例えば、北海道算数数学教育会・高等学校部会・数学教育実践研究会（「数学のいずみ」ホームページ参照）は、年4回の研究会で発表された多くの教材が公開され授業で活用されている。

## 8 終わりに

本稿では限られた素材しか扱わなかったが、今後は様々な分野の素材が開発され、それが教材化されるとともに、それらを用いて

能力の高い生徒を啓発し、眠っている数学的能力を目覚めさせ、伸ばす適切な指導法が一層研究されることであろう。

## 参考文献

- [1] I. Thomas (1941) : Pappus of Alexandria selections ILLUSTRATING the history of Greek Mathematics two volume II, from Aristarchus to Pappus, Harvard University Press, p. 578
- [2] 岡崎知之 (2013) 数学クラブ「まてまて」の思い出、第87回数学教育実践研究会
- [3] 高木貞治 (2000) 初等整数論講義（第2版）、共立出版
- [4] 竹之内脩 (2012) 数書九章、数理解析研究所講究録第1787巻18-28
- [5] 土井幸雄 (2006) 数とパズルの18話、日本評論社
- [6] 日本数学教育学会 (2006) 算数・数学科の学習指導要領の改訂についての要望（報告）、第88巻、第5号
- [7] 林雄一郎 (2012) 数学的活動についての一考察-高等学校の場合、北海道情報大学紀要第23巻第2号
- [8] 林雄一郎 (2013) 数学ソフトウェアを用いた数学教材の有効性について、北海道情報大学紀要第24巻第2号
- [9] 福原満洲雄 (1985) 射影幾何、実教出版
- [10] 保坂高志 (2001) 円環問題の探究による数学観の変容に関する一考察：パップスや算額原典を利用して、日本数学教育学会（埼玉大会）
- [11] 三村征雄 (1956) 大学演習・代数学と幾何学、裳華房
- [12] 文部科学省 (1997) 第16期中央教育審議会（第二次答申）