高校数学における数学的活動についての再考察

林　　　雄一郎
北海道情報大学

A Review on Mathematical Activity in High School Mathematics

Yuuichirou HAYASHI
Hokkaido Information University

平成27年３月

北海道情報大学紀要　第26巻　第２号別刷

〈論　文〉

高校数学における数学的活動についての再考察

林　　雄　一　郎

A Review on Mathematical Activity in High School Mathematics

Yuuichirou　HAYASHI

要　　旨

2009 公示の学習指導要領で示された高校数学は、基本的な概念とそれに係わる原理・法則の体系的な学びや、興味ある事象を数学的に考察し、表現し、それを活用する能力、数学的論拠に基づいて判断する能力の向上を目指している。このねらいにおいて、小学校での算数的活動、中学校での数学的活動の発展的延長として、数学的活動を通した学習が重視されており、課題学習が「数学Ｉ」と「数学Ａ」に導入された。その教材はこのねらいの成否のカギの一つになるに違いない。しかし、この開発は全ての教師の着想や努力に依存している。数学的活動の在り方について、著者は紀要 23-2、24-1 で論じたが、新たな視点からこの論文で再考察を加えるとともに、「数学Ｉ」「数学Ａ」以外の科目の数学的活動の教材として、個体群生長の数理的モデルや Frobenius 根にかかわる問題などを与える。

Abstract

Course of study 2009 for high school Mathematics had aimed at the improvement of abilities to understand fundamental conceps and principles-laws systematically,consider and express interesting matters mathematically , apply the results of study and judge based on a mathematical ground.

In this aim, learning by the math activity is emphasized as extension of the arithmetic activity in elementary school and the math activity in junior high school and problem learning is introduced into “Math Ｉ”and” Math A” .The teaching materials of this learning must be one of keys of success in this aim,but these development depends on the ideas and effort of every math teacher.

The author had written papers about the ways of math activity on 23-2,24-1 Memories of Hokkaido Information University2012.In this paper ,the author discusses about this theme again from new viewpoints,and gives the problems about mathematical growth model and Frobenious roots ,et al.as teaching materials for the math activity of subjects except “Math Ｉ”,”MathA “.

キーワード

数学的活動、課題学習、発展的な教材、課題解決、個体群生長、塵劫記、Frobenius 根

*北海道情報大学情報メディア学部情報メディア学科特任教授 Specially appointed Professor , Department of　Information　Media , faculty of Information Media

1　はじめに

2014年は新課程完成年度であった。いま、学校で行われている数学の授業は教科書の学習とその定着のための問題演習に追われるのが常態のようである。そして、数学教師の間で数学的活動の内容や教材に関する話題は残念ながら少ないようである。例えば、著者が参加している高校教員の数学研究会の発表レポートを見ても数学的活動に関する内容や指導法に関するものが少ないのが現状である。学力の習得はもちろん大事であるが、従来からの定型的な数学学習から脱皮し、課題解決的な学習を通して、生徒自ら課題を発見し、それを解決していく力を身に付けることができるような授業への改革をめざすねらいは今一歩と考えている。

まず、現在の状況を検証し考察する。数学教育における数学的活動の意義については先に論じているが（林、2012a,b）、これは数理事象の探究力・活用力の養成がねらいで、事象の数理的カラクリを探究し、その数学化・モデル化で数理的知見を習得しその活用力を養う有効な教育方法である。

次に、数学的活動の例を考える。日本では江戸時代にベストセラーだったという和算の書、塵劫記（吉田光由 1598~1672）のネズミ算を取り上げ、個体集団の生長（あるいは抑制的生長）モデルとそれを表現する方程式について考察する。この種の例としてなじみ深いのは Fibonacci のウサギの増殖数列（「算盤の書 Liber Abaci,1202」）である。

ネズミ算の数列に係わる数理は、等比数列・指数関数の教材として活用できる。また、これに関連して差分方程式を取り上げることも出来る。さらに、自然界におけるネズミは、天敵や環境条件で抑制されるから計算通りには増えない。このような条件付きのモデル化に有効なロジステック方程式についても触れる。また、増殖モデルとしてのライフ・ゲームにも触れる。

数学的活動は数学の活用力を習得することもねらいとしている。今日、社会経済現象への数学の応用は広い。そこで、数理経済学から産業連関表を取り上げて考察する。

これを扱うには、線型連立方程式の非負行列にかかわる Frobenius の定理が有効であり、この定理2次行列の場合を証明し、その応用について考察する。

2　数学的活動と教科書の在り方

数学的活動は、2009 年改訂の学習指導要領における高校数学科教育目標「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる」において、数学の学習方法であり内容と位置付けられた。1999 年改訂における創造性の基礎の育成、数学的な見方や考え方のよさの認識、積極的活用の態度の育成から、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的理解や事象の数学的考察や表現力の育成にまでかかわることが大きな変化であった。

このため、数学的活動を通して数学的概念や原理・法則への知識理解と思考力・表現力等を高める方略が必要となり、数学教育に新たな課題を提供したことになる。

その呼び水としての課題学習が、多くの生徒に major な「数学Ⅰ」、「数学A」に入り、生活と関連付けたり発展させたりし、生徒に

関心・意欲を高める課題を設け、数学を学ぶ目的意識や主体的学習を促し、もって数学のよさを認識させるものとした。そのため、複数の単元の終了時など学習効果を高める適切な時期・場面を捉えて内容と関連する課題を設定し、その解決を行う数学的活動を想定している。

しかし、数学的活動は数学学習全体に及ぶという目標の趣旨から、「数学Ⅰ」、「数学A」以外の科目でも数学的活動は重視されるべきであるし、数学的活動は課題学習だけと考えるのは早計である。

数学的活動の取り扱いには「数学的活動を一層重視し、身近な事例を取り上げるなど生徒の主体的な活動を促す」とあり、指導計画の作成と内容の取扱いには以下のような３つの活動を各科目の特質に応じて行うとある。したがって、これが数学的活動の具体的方法であり内容と考えてよい(林, 2012a)。

(1) 自ら課題を見出し、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりする
(2) 学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用する
(3) 自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりする

(1)は数学の問題解決の方略であり、数学的活動の中核であると考えてよいだろう。問題の分析⇒解決策の立案⇒考察・処理⇒結果の吟味・振り返り⇒別解の考察⇒一般化・特殊化という過程を辿るのが一般的である。

(2)は事実の帰納的発見とその数学化及び数学的知見を事象の解明やモデル化に適用するものである。数学を作る過程を体験的に学ばせ、知識・理解を広げ深めさせていく方法は発見的学習と呼ばれ、生徒に発見の喜びと興奮を喚起し、数学的な見方や考え方を学ぶとともに興味・関心を高めるなど教育的意義は極めて大きい(Bruner, 1961)。

(3)は知的コミュニケーション技法の習得がねらいである。授業方法の工夫、例えばグループ学習での集団討議、レポート作成・発表学習などの言語活動が考えられる。

ところで、学校におけるほとんどの授業は教科書に沿ってなされているのが実情である。もし、目標の趣旨を徹底しようとするのならば、教科書全体に(1)～(3)を遂行する方略が色濃く出ていなければならない。

2012 年度より先行実施に入り、新教科書が使われ始め、2014 年度で丸３年経過するが、数学的活動を中心に据えた教科書は皆無に近く、教科書の内容は概念や原理・法則の知識・理解とその定着のための演習という従前と余り変わらい。その理由は、数学科目標にある「・・基本的な概念や原理・法則の体系的理解」という文言に拘った結果であろうと推測する。いずれにせよ、(1)～(3)への配慮や数学的活動を課題学習以外でも配慮する記述が十分であったか疑問が残る。

もっとも、教科書はミニマムであり、授業方法や指導法は各教師の創意工夫に任せるべきであるという消極的な意味の教科書観に立つのならば、致し方ない。

しかし、授業改善に教科書の果たす役割は大きいことを考えれば、知識・理解や諸能力の育成と(1)～(3)のねらいの両方を達成する教科書が求められてよいはずである。

それは、まず(2)で数学を作る過程に生徒を誘い、次に(1)の課題解決を通して知識を体系的にまとめあげ、さらに(2)の知識・技能を活用を通して学力の定着を図る。このよ

うな活動をグループで知的コミュニケーションを図りながら行い、レポートにまとめ発表する。つまり、(2)⇒(1)⇒(2)の流れに(3)を適宜取り入れた教科書である。

中学校の数学的活動(林, 2012b)では、[数学的活動]のイで日常生活や社会で数学を利用する活動が謳われている。そのため、教科書の例題などは身近な生活空間からの教材化が多い。小学校の算数的活動はもっと具体的な例題を豊富に扱っている(林, 2012b)。

もし、小学算数、中学数学の内容は初等的だからそういう教科書づくりは容易だが、高校の内容は程度が高く抽象的であるから身近な例は難しいという論は、論点のすり替えであり、生産的ではない。

課題学習については各教科書とも工夫が見られ、下記のような課題学習の方法や課題例が掲載されている。

・課題の見つけ方、取り組み方、取り組み例、レポートのまとめ方、具体例(生活の中の論理、黄金比、利益を最大にする、２次関数が決まる条件、三角比の値、カメラの画角、決定の方法(啓林館、詳説数学Ｉ)

・試合の方法、多人数のときのジャンケン、階乗、約数、切手の問題、ゲーム必勝法立方体、通路を通過できる図形（啓林館、詳説数学Ａ）

・黄金比と黄金長方形、絶対値を含む関数と方程式、不等式、正三角形と円周率の値、仮平均とデータの分析(数研出版、新編数学Ｉ)

・道順の総数と和の法則、トランプの確率、同じ誕生日の人がいる確率、チェバの定理の逆とその利用、相似を利用する作図、x, y の２次方程式の整数解、整数の割り算の等式の活用、n 進数の足し算・引き算（数研出版、新編数学Ａ）

・数の不思議、バザーの売り上げ、物の見え方、桜の開花(東京書籍、数学Ｉ)

・コイン投げ、誕生日は何曜日？、正多面体（東京書籍、数学Ａ）

啓林館の教科書は課題学習の方法を詳細に記しており極めて配慮がされている。

多くの教科書の課題は解説・解答が記載された場合が多い。したがって、これをもとに課題学習を行うのは難しい。

著者ならば解答は伏せて空欄にしておき、ヒントを幾つか付けて生徒自ら課題に取り組ませるよう配慮をするだろう。生徒は空欄に自らの考えを記入しながら課題解決していけるようなWorking sheetを挿入した教科書である。高校教科書にも小中の教科書のようにいろいろ工夫した楽しく教育的な仕掛けがあっても良いだろうと思う。

以上様々にわたって述べてきたが、「数学的活動を通して」という目標は、授業改革を促すものであり、それを実現するための授業設計、教材開発が喫緊の課題であることは言うまでもない。

次に、数学的活動に用いる教材の具備すべき条件について考察する。これについては先に詳しく論じた(林、2014a)が、(2)を目指した教材に限定して述べる。

まず、生徒自ら見つけた課題はすべて無条件に良しとせねばならないが、生徒にとって面白そうな問題が最良であり、生の問題、身近な生活、社会生活に関連したものが想定される。これらが、①問題解決のために明瞭な数学的な概念や技能を含む、②結果が一般化や拡張ができる、③多様な解決が可能という３条件を満たすものなら

尚望ましいことになる。このような問題は、複数の単元にまたがる総合問題ないし融合問題である。課題学習の教材は上述した趣旨に基づき、問題解決に取り組むものである必要がある。

３　ネズミ算の問題

塵劫記は数学的活動の課題の宝庫である。和算の文化に親しむのは生徒にわが国の文化・伝統に対する理解を促す絶好の機会ともなる。

その中に次のような問題がある。

「正月に鼠、父母出でて子を十二匹生む。親共に十四匹に成る也。此の鼠、二月には子も又子を十二匹ずつ生む故に、親共に九十八匹に成る。此の如く月に一度ずつ生むとき、親も子も孫も曾孫も月日に十二匹ずつ生むとき、十二月の間に如何ほど成るぞ」

答えとして、「二百七拾六億八千二百五十七万四千四百二匹成る也。法に、鼠二匹に七を十二度掛くれば右の鼠の高さと知るべし」とある(遠山 1960)。

この問題の数学化を考える。

１月初めには２匹いた。また、毎月２匹が１２匹の子を産むから、親１匹に対して子６匹の割で増える。数列の考えを用いる。k 月末の鼠の数を a_k とおき帰納的に考察すると

1 月初め　$a_0 = 2$

１月末は、$a_1 - a_0 = 12 = 6a_0$　だから、

$a_1 = 2 + 12 = 2\cdot 7$　となる。

2 月末は、$a_2 - a_1 = 6a_1$ だから、

$a_2 = 7a_1 = 2\cdot 7^2$　となる。

k 月末は、$a_k - a_{k-1} = 6a_{k-1}$　・・・①

$a_k = 7a_{k-1}$　となる。

一般項は　$a_k = 2\cdot 7^k \quad (k = 0,1,2,\cdots)$ であり、初項２、公比７の等比数列となる。

12 月末は　$2\cdot 7^{12} = 27682574402$　となる。

次にこの数学化を発展させよう。

いま、$a_k = f(k)$ とおく。　$f(x)$ は、変域 $\{0,1,2,3,\cdots\}$ 、値域は自然数全体とする数論的関数とする。①式は

$$f(k) - f(k-1) = 6f(k-1) \quad ・・・②$$

となる。

これは１階差分方程式である。差分方程式の考えは離散的な関数の変化を扱うのに有効である。②の一般解は $f(k) = C\cdot 7^k$ である。ただし、$f(0) = C$　である。

ネズミ算の問題は、②式を初期条件 $f(0) = C = 2$　のもとで解いた特殊解である。さて数学は一般化を考察する。

一般に、$f(x+1) - af(x) = 0$

$(x = 0,1,2,\cdots)$　とおくとき次式がなりたつ。

$$f(x+1) - f(x) = (a-1)f(x) \quad ・・・③$$

左辺を $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ とおくと、x が１だけ増加したときの $f(x)$　の差分を表している。これは、等差・等比数列を差分方程式で表す。　初項 a　、公差を d　、公比

をr　とするとき、

等差数列は　$f(x+1)-f(x)=d$

$$\Delta f(x)=d \qquad ・・・④$$

であり、一般解は　$f(x)=a+xd$　となる。

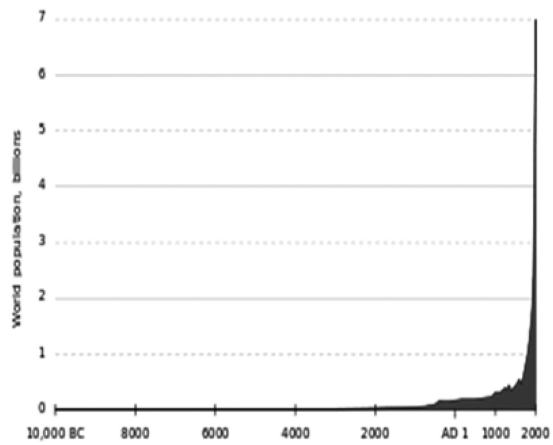
等比数列は　$f(x+1)=rf(x)$

$$\Delta f(x)=(r-1)f(x) \qquad ・・・⑤$$

であり、この一般解は $f(x)=ar^x$ だから

$r=1$　のとき、　$f(x)=a$（定数）　である。

④、⑤はそれぞれ算術的生長モデル、幾何的生長モデルとよばれ、生長現象の自然なモデルとなる基本形と考えられる。マルサス Malthus（英、1766~1834）の「人口論」では、食料の増加はせいぜい算術的生長にすぎないが、人工増加は幾何的生長であるとした（高橋,1961）。世界全体では人口爆発であるが、特定の地域（例えば日本）ではこの生長モデルは成り立たない。



世界人口の増加 wikimedia commons

4　ネズミ算の変形問題

ネズミ算のさらなる一般化を考える。どんな増加にも必ず抑制因子が存在するのは世の常である。そこで、**3** の問題で最初に２匹いて、毎月１匹当たり６匹生むのは同じだが、猫がいて毎月１０匹のネズミを捕る場合のモデルはどうなるだろうか。差分方程式は

$\Delta g(k)=6g(k)-10$　・・・⑥　となる。

$g(k+1)=7g(k)-10$　と変形すると、

初期条件は　$g(0)=2$　であり、順次

$$g(1)=7g(0)-10=4$$

$g(2)=7g(1)-10=18$　　となり、表にまとめると以下のようになる。

k	1	2	3	4	…
猫いない	14	98	686	4802	…
猫いる	4	18	116	802	…

表１　猫がいる場合といない場合の個体数

表から猫がいる場合はいない場合の約 $\dfrac{1}{6}$ となることが予想され、これを検証する。

まず、⑥の形を一般化した次式を考える。

$\Delta g(x)=(a-1)g(x)+b$　ただし、$a\neq 0$

変形して　$g(x+1)=ag(x)+b$

これから、$g(x)$　を求めると、

$$g(1)=ag(0)+b$$

$$g(2)=ag(1)+b=a^2g(0)+(1+a)b$$

数学的帰納法を用いると次式が成り立つことが分かる。

$$g(x)=a^xg(0)+b\sum_{k=0}^{x-1}a^k.$$

$a\neq1$ ならば

$$g(x)=a^xg(0)+\frac{1-a^x}{1-a}\cdot b$$

$$=a^x\left(g(0)-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}$$

$$=Ka^x+\frac{b}{1-a}$$

$K=g(0)-\dfrac{b}{1-a}$.　・・・⑦　を得る。

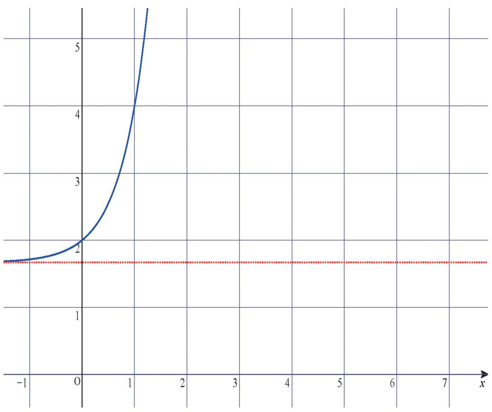
また　$a=1$　のとき　$g(x)=g(0)+bx.$

さて、変形ネズミ算問題に戻ると

$a=7$　$b=-10$　を上式に代入し、$g(x)$　を求めると　$K=2-\dfrac{10}{6}=\dfrac{1}{3}$　だから

$g(x)=\dfrac{1}{3}\cdot7^x+\dfrac{5}{3}$　　となる。

グラフは下図となる。



式⑦のグラフ

また、$g(x)$　と $g(x)$ の比を取って

$$\frac{g(k)}{f(k)}=\frac{1}{6}+\frac{5}{6\cdot7^k}\to\frac{1}{6}\quad(k\to\infty)$$

こうして予想が証明される。

一般の場合は、k が大きくなれば

$\dfrac{K}{C}=1-\dfrac{b}{C(1-a)}$　倍に近づく。

3，4 は「数学B」の等比数列の単元の教材となるだろう。

5　個体群生長の抑制モデル

個体群生態学では、離散的な個体数と時間を連続量で近似する。いま、個体数 N の個体群において、その増加が全個体数に比例すると仮定する。r　を増加係数とするとき、r は(出生率)-(死亡率)である。

3 の③に相当する式は次の微分方程式となる。

$$\frac{dN}{dt}=rN.$$

変数分離形であり、N で割って積分すると

$$\int\frac{dN}{N}=r\int dt\qquad\log N=rt+c$$

一般解は $N=Ce^{rt}$　となる。

これは指数関数となり時間とともに個体数爆発となる（Malthus 生長モデル）。

そこでこの個体数増加をおさえる抑制因子を含む新たな増加環境を次の①〜③とする。

① 個体数 $N=0$　のときは増加率 0

② 収納環境には限度があり、それを K とする

③ $N\to K$ のとき増加率は減少する

この条件を満たす個体群生長モデルは次式で与えられる。（ロジスティクモデル）

$$\frac{dN}{dt}=rN\cdot\left(1-\frac{1}{K}\cdot N\right). \quad \cdots ⑧$$

ここで K は環境収容率である。

$k=\frac{r}{K}$ とおくと⑧式は

$$\frac{dN}{dt}=N\left(r-kN\right) \quad \cdots ⑨$$ となる。

$r-kN$ は固体増加抑制因子である。

⑨式を変形して、

$$\frac{1}{r}\int\left\{\frac{1}{N}+\frac{k}{r-kN}\right\}dN=\int dt$$

$$\left\{\log N-\log\left(r-kN\right)\right\}=rt+c$$

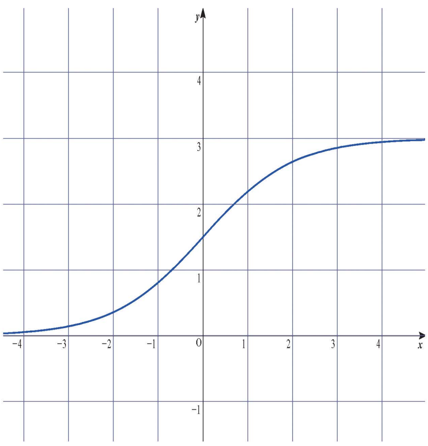
$$\log\frac{N}{r-kN}=rt+c$$

$$N=\frac{rCe^{rt}}{1+kCe^{rt}}=\frac{kKC}{kC+e^{-rt}}=\frac{K}{1+\frac{1}{kC}e^{-rt}}.$$

$t\to\infty$ のとき $N\to K$ となる。

時間の経過とともに、K に近づくのは生長が飽和状態になることを意味する。

下図は $y=\frac{3}{1+e^{-x}}$ ・・・⑩のグラフである。



式⑩のグラフ

⑧式を差分方程式に変換すると

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{N_{i+1}-N_i}{\Delta t}=rN_i(1-\frac{1}{K}\cdot N_i)$$

$$N_{i+1}=N_i+rN_i\left(1-\frac{1}{K}\cdot N_i\right)\Delta t$$

$$=\left(1+r\Delta t\right)N_i\left(1-\frac{r\Delta t}{1+r\Delta t}\cdot\frac{1}{K}N_i\right).$$

・・・⑩

ここで $X_i=\frac{r\Delta t}{1+r\Delta t}\cdot\frac{1}{K}N_i$

$s=1+r\Delta t$ とおけば

⑩から次の漸化式を得る。

$$X_{i+1}=sX_i\left(1-X_i\right) \quad \cdots ⑪$$

初期値 $N_0\left(0<N_0<1\right)$、s の値を与えると時間経過に伴う N_i の値が求められる。

⑧式はロジスティック方程式と呼ばれ、P.F.Verhulst（仏、1804~1849）が発案したものである。また、差分方程式は生物個体数の増減が離散的に変化する様子を自然にモデル化するのに有効なことが理解される。

微分方程式は「数学Ⅲ」にないが、積分法の応用の単元で発展的な教材として導入できるだろう。

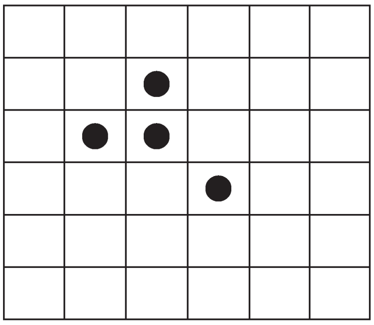
6　ライフ・ゲーム

ライフ・ゲームという一人遊びがある。これは Scientific American 誌の 1970 年 10 月号に Cambridge 大学の J .H.Conway（単純群の発見者）が発表したもので当時計算機科学へ多大な反響を起した。

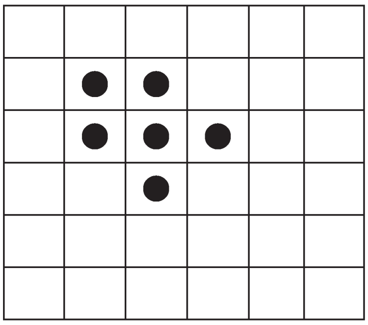
Celler Automaton の考えに従えば、格子状のマス目の一区画 P を中心に、隣接する 8 区画を近傍（Moor 近傍）と呼ぶ。近傍の各区画には細胞があるかないかの 2 状態があ

る。近傍の細胞数が中心Ｐの細胞の生死を決めていくルールのもとに増殖が進むのがこのモデルの特徴である。１サイクル毎に、各区画の状態をチエックし、次の３つのルールで同時に変えていく。この操作は無限に繰り返され、パターンは安定状態（定常状態）か振動か発散かいずれかとなる。

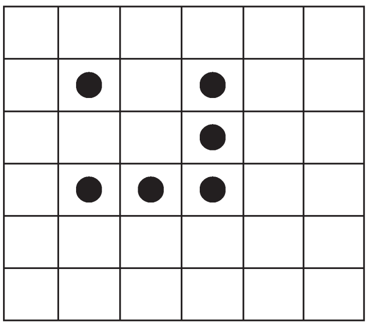
① $n=2,3$ ならばＰにある細胞はそのまま生存する
② $n=3$ でＰに細胞がないとき、新たな細胞がＰに誕生する
③ $n\leq 1, 4\leq n\leq 8$ のとき、Ｐに細胞があれば死滅する



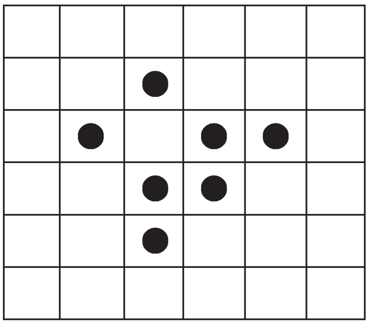
a　（初期配置）



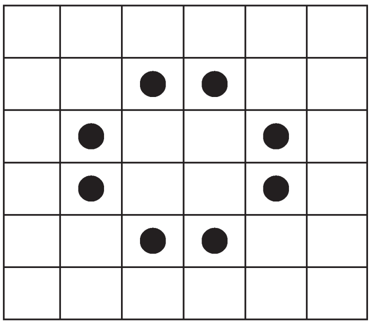
b



c



d



e（定常状態「池」）

$a\rightarrow b\rightarrow c\rightarrow d\rightarrow e$ という世代変化を手計算で求めると、初期配置から５世代目まできて定常状態に入ることが分かる。

ライフ・ゲームは生物細胞群の増殖モデルと考えられる。生育環境は密であっても、疎であっても個体は生存していけないし、丁度適切な数のときにのみ生長が保障されるものである。

一般に、入力に応じて一定の規則で有限の状態遷移が起こりある仕事をしていく機械を有限オートマトンといい、身近な例としては自動販売機がある。

どういうパターンに生長するかは初期配置と生成規則で決まる。そのパターン変化をコンピュータ・シミュレーションで求めた多くの結果は大変興味深い。

この例は「数学活用」の社会生活における数理的な考察の教材となるであろう。

7　ある線型連立方程式とその解

数理経済学における産業連関表にかか

わる Leontyev 方程式を考える。
そして、ここで扱う線型連立方程式は非負行列で表される。$\vec{x}$ を総生産量ベクトル、A を投入係数行列、$\vec{y}$ を最終需要ベクトルとすれば次式が成り立つ。

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

これを表２の産業連関表で確かめる。
表における変数間の関係を式で表すと

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + y_i = x_i \qquad i = 1,2,3$$

$$a_{i1} = x_{i1}/x_1 \qquad a_{i2} = x_{i2}/x_2 \qquad a_{i3} = x_{i3}/x_3$$

とおくと

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + y_1$$
$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + y_2$$
$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + y_3$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とすれば　①が成り立つ。

	第１次産業	第２次産業	第３次産業	最終需要	生産量
第１次産業	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
第２次産業	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
第３次産業	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3

表２　産業連関表

行列 A は投入係数行列であり

$0 \le a_{ij} \le 1$　だから非負行列である。

① は Leontyev 方程式と呼ばれる。

$$\vec{x} = (I - A)^{-1}\vec{y}.$$

$(I - A)^{-1}$ ：Leontyev 逆行列

$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$ だから

$$\vec{x} = (I - A)^{-1}\vec{y} = \vec{y} + A\vec{y} + A^2\vec{y} + \cdots.$$

$A\vec{y}$ は最終需要 $\vec{y}$ を生産する素材、

$A^2\vec{y}$ は $A\vec{y}$ を生産する素材、・・・となる。

また、行列 A は n 次非負正方行列(行列の成分 $a_{ij} \ge 0$ ）だから Frobenius の定理より、Frobenius 根が存在する。それを λ とすれば　$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ となる。すなわち、生産活動に注ぎ込まれる素材の投入量 $A\vec{x}$ は $\lambda\vec{x}$ に等しい。

$$\vec{x} - A\vec{x} = (1 - \lambda)\vec{x}.$$

$0 < \lambda < 1$ ならば　余剰生産量があり拡大再生産となる。$\lambda = 1$ ならば余剰は０で単純再生産となる。また、$\lambda > 1$ ならば縮小再生産となる（二階堂,1971)。

以上見てきたように、数理経済学の分野で Frobenius の定理は有用なことが理解できる。さらに、次のような問題でこの定理の活用を考察する。

問題 a

x, y を未知数とし、パラメータ λ を含む

次の二元連立一次方程式を考える。

$$(\lambda-2)x-3y=0 \quad ・・①$$

$$-4x+(\lambda-3)y=0 \quad ・・②$$

このとき、パラメータ $\lambda \geq 0$ に対応する解で、$x \geq 0$　$y \geq 0$ かつ $x+y>0$ を満たすものを求めよ。

＜解＞

この場合、パラメータ λ の値は付加条件によって一意的に決まってしまう。

まず y を消去する。

①から　$(\lambda-2)(\lambda-3)x-3(\lambda-3)y=0$

②から　$12x-3(\lambda-3)y=0$

これから　$\{(\lambda-2)(\lambda-3)-12\}x=0$

同様にして $\{(\lambda-2)(\lambda-3)-12\}y=0$

これらを加えて

$$\{(\lambda-2)(\lambda-3)-12\}(x+y)=0$$

$x+y>0$ より

$$(\lambda-2)(\lambda-3)-12=0 \quad \therefore \lambda^2-5\lambda-6=0$$

解は　$\lambda=6,-1$

この解は、次のように①，②を行列で表し

$$\begin{pmatrix}\lambda-2 & -3\\ -4 & \lambda-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

non-trivial な解をもつ必要十分条件は次式であることから問題の条件よりも緩い条件ながら求められる。

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3\\ -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$$

る。

最大根６を Frobenius 根という。

$\lambda=6$ に対応する解を求めるには①から

$x=\dfrac{3}{\lambda-2}=\dfrac{3}{4}$　$y=1$ これは②も満たす。

この解は付加条件を満たす特殊解である。

一般解は　$(x,y)=(3t,4t)$　t; 正の実数

この問題のルーツは何か考えさせるのも興味関心をそそるであろう。

①　②を行列表現してみる。

$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ とおくと与えられた連立方程式は　$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$　$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$　λ は固有多項式 $|A-\lambda E|=\lambda^2-5\lambda-6$ の根であり行列 A の固有値である。$\vec{x}$ は λ に対する A の固有ベクトルである。この問題は固有値を求め、固有ベクトルを求める固有値問題だったことが分かる。

８　Frobenius の定理の証明

２次の場合のこの定理は次のようになる。

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ は $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ を満たす非負行列とする。

このとき、λ が A の最大固有値ならば、λ に属する固有ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ で

$x \geq 0, y \geq 0$ かつ $x+y>0$ を満たすものが存在する。λ は行列 A の Frobenius 根と呼ばれる。

＜証　明＞

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ を書き換えると

$(\lambda-a)x-by=0$ ・・①

$-cx+(\lambda-d)y=0$ ・・②

このとき　$(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=0.$ ・・③

この方程式の判別式は

$$(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4bc\geq 0$$

よって、実数解をもつ。

２根の和＝$a+d\geq 0$ より正の根が少なくとも一つはある。

Frobenius 根を λ とおくと、$\lambda-a\geq 0$ $\lambda-d\geq 0$ ・・・④　が成り立つ。

これは以下のことから分かる。

$$\lambda=\frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$ であるから

$$\lambda\geq\frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2}}{2}$$
$$=\frac{a+d+|a-d|}{2}$$
$$=\frac{a+d+\max(a,d)-\min(a,d)}{2}$$
$$=\max(a,d).$$

次に、この λ のとき、①、②の解が符号条件を満たすことをいえばよい。

２つのケースに分けて考える。

１）$\max(\lambda-a,\lambda-d)>0$ のとき

$\lambda-a>0$ と仮定すると③から $\lambda-d>0$

$$x=\frac{b}{\lambda-a}.$$

$y=1$ は $x\geq 0, y>0$ かつ $x+y>0$ だから符号条件を満たす。

さらに①の方程式を満足する。また、以下のように②の方程式を満足することが分かる。

②を用いて

$$(\lambda-a)(-cx+(\lambda-d)y)$$
$$=-c(\lambda-a)x+(\lambda-a)(\lambda-d)y$$
$$=-c(\lambda-a)x+bcy$$
$$=-c((\lambda-a)x-by)$$
$$=0.$$

$\lambda-a>0$ より　$-cx+(\lambda-d)y=0.$

２）$\max(\lambda-a,\lambda-d)=0$ のとき、④から

$\lambda-a=0$ かつ $\lambda-d=0$ このとき $bc=0$

$b=0, c>0$　ならば　②より $x=0$　y は任意正数、$c=0, b>0$ ならば $y=0$ 、x は任意正数　$b=c=0$ ならば x, y は任意正数が解となる。いずれの場合も符号条件を満たす。こうして、２次行列の場合が証明されたことになる。

９　非斉次方程式の場合

問題 a の方程式を非斉次にした場合を以下の問題で考察する。

問題b　次の連立方程式が非負解をもつための ξ の満たす条件を求めよ。

$(\xi-2)x-3y=5$ ・・①

$-4x+(\xi-3)y=6$ ・・②

＜解＞

行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \xi-2 & -3 \\ -4 & \xi-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

まず $\begin{pmatrix} \xi-2 & -3 \\ -4 & \xi-3 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつ条件を考える。

$$\Delta(\xi)=\begin{vmatrix} \xi-2 & -3 \\ -4 & \xi-3 \end{vmatrix}=(\xi-2)(\xi-3)-3\times 4$$

とおく。

問題 a の Frobenius 根 $\lambda=6$ に対して、$\xi>\lambda=6$ となると仮定すれば

$$(\xi-2)(\xi-3)>(\lambda-2)(\lambda-3)=12>0$$

だから

$$\Delta(\xi)=(\xi-2)(\xi-3)-12>0$$

この条件のもとで解を計算する。

①、②から

$$(\xi-2)(\xi-3)x-4(\xi-3)y=5(\xi-3)$$

$$-12x+4(\xi-3)y=24$$

となり、辺々加えて

$$\Delta(\xi)x=5(\xi-3)+24$$

$x=\dfrac{5\xi+9}{\Delta(\xi)}>0$ を得る。

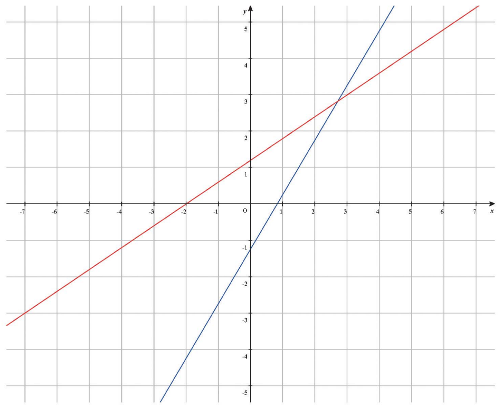
同様にして

$$y=\frac{6\xi+8}{\Delta(\xi)}>0.$$

したがって、$\xi>\lambda=6$ と仮定すると非負解をもつことが分かる。

GRAPES を用いて①、②のグラフを描き ξ の値を変化させてみる。

$\xi=6$ で①と②は平行になり、6 を越えると第 1 象限で交点を持つ。こうして非負解をもつことが確かめられる。



$\xi=8>\lambda=6$ の場合の①、②のグラフ

7，8，9 の内容は「数学活用」の社会生活における数理的考察「イ数学的な表現の工夫」の教材として活用できる。

１０　おわりに

高校数学教育がこれまで以上に充実させるためには、授業モデルと指導計画、教材、学習集団の編成、授業評価など様々な課題を一つ一つ解決して行かねばならない。その取り組みの過程こそがまさに大事なのであって、その中でいろいろな実践が精力的に為され、比較・検討されながらより良い方法論へと収束していくのである。

そのためにも、教材の開発が重要となっている。本稿で扱った生物個体群の幾つかの生長モデルは現代的課題である人口問題を考える上で意義があろう。また、二元連立一次方程式は、日常よく出会う問題の数学化の中で表れ、その際に正の解の存在は実際問題の中で意義のあるものとなる。その条件を与え

る Frobenius の定理は重要であることが理解できる。このような課題を解決する中で数学的な見方や考え方を学んでいくことが出来るのである。

最近、次期学習指導要領の議論が始まった(金本・大久保他,2014)。松嵜昭雄氏の論の中で、他科目への課題学習の導入、「数学C」とその中での行列を復活し経済学やマーケティングの問題を扱う、「数学活用」の趣旨を数学的活動としてとらえ直すとともに、高等教育への進学者を念頭にした数理科学モデリングの導入などには賛同できる。

数学的活動が全科目に課題学習として拡大し、「数学活用」がもっと重視されることを切に願いものである。

戦後の日本の教育課程の変遷を辿れば明らかなように、内容の系統性と学力の定着、情意的目標の達成や体験的な数学学習の両立は学校数学においていつの時代も泣き所であることに変わりはない。しかしこれを二項対立でとらえず共存させ克服するのは可能と考えている。

参考文献

[1]金本・大久保他:学習指導要領算数・数学科改訂に向けての検討課題、日本数学教育学会誌第 9 巻第 11 号、平成 26 年

[2]G.Martin(一松信訳):別冊サイエンス Scientific American、数学ゲームⅠ,日本経済新聞　　社,1979

[3] 高橋健人(1961):差分方程式、培風館

[4] 遠山啓(1960):数学入門(下)、岩波新書

[5] 二階堂副包(1971):経済のための線型数学、培風館

[6] 林雄一郎(2014a):数学的活動についての一考察―高等学校の場合、23-2 北海道情報大学紀要

[7] 林雄一郎(2014b)中学校における数学的活動についての一考察、24-1 北海道情報大学紀要

[8] J.Bruner(1961):The process of education「教育の過程(鈴木祥蔵他)」、岩波書店