〈資料〉

２次方程式の解の公式の証明に関する注意

中等教育における証明の論理

笹山　智司 *

Remarks on the Logic in Solutions to the Quadratic Formula in Middle-School Mathematics

Satoshi SASAYAMA*

要旨

中等教育の「数学」で扱う証明には，いくつかの欠陥が知られている。本稿では，２次方程式の解の公式に関する中等教育での証明の論理を検証する。また，論理ギャップのない解の公式の考え方を紹介する。

Abstract

There are a number of flaws in the logic of proofs in the subject of mathematics at the middle-school level. This paper provides a verification of the logic in the proof of the quadratic formula for middle-school education, as well as introduces a way of thinking about proving the quadratic formula without gaps in logic.

キーワード

２次方程式の解の公式 (quadratic formula)　　絶対値 (absolute value)

* 北海道情報大学情報メディア学部情報メディア学科講師，Lecturer, Department of Information Media, HIU

1. はじめに

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

は，すべての係数について，$a, b, c \in \mathbb{C}$[1] であれば，必ず 2 つの解を $\mathbb{C}$ の範囲で持つ。これを代数学の基本定理という。最高次が 4 次以下であれば，和 $+$，積 $\times$，根号 $\sqrt{\cdot}$ を有限回用いて，全ての解を係数を用いて表現できる。これを解の公式という。中等教育前期「数学」では，複素数を扱わないので必然的に全ての係数について，$a, b, c \in \mathbb{R}$[2] である。中等教育後期「数学」では，複素数の扱いは，それぞれの年度の指導要領により変化するが，係数が複素数である場合の解の公式については触れられない。[3] 以降，2 次方程式の係数は断らない限り，全て実数とする。2 次方程式の解の公式は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

で与えられる。中等教育前後期ともに，この公式の証明が触れられることが大半である[4] が，仮定や計算手順によって論理ギャップが生じることは知られていないようである。本稿では，2 次方程式に対する中等教育前後期における仮定を、教科書掲載の問題配列や教授指導書内記述により推察する。推察された仮定の下に、公式の証明における論理ギャップの有無を明らかにする。また，どのように証明すれば，論理ギャップを気にすることなく証明できるかを紹介する。

[1] 複素数全体の集合。
[2] 実数全体の集合。
[3] 複素数の演算の複素平面上での意味付けと複素数の極形式を利用することで，複素係数 2 次方程式を解くことは可能。
[4] 教科書の難易によって，公式の紹介のみで終えたり，具体的な数値において変形することで，公式の正しさを担保していたりする。

2. 中等教育前期における 2 次方程式の計算

この章では，中等教育前期で 2 次方程式を扱う際の仮定を明らかにし，解の公式の証明を考察する。

2-1 解の公式と証明

まず，よく見られる教科書記載の 2 次方程式の解の公式を証明を紹介する。

証明. 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の両辺を a で割る。

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$ [5]

定数項 $\frac{c}{a}$ を移項[6] し，両辺に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加える。

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

左辺は因数分解し，右辺は分数を計算する。

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

よって，

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

左辺の定数項を移項し，分数を計算すると

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

以上により，公式が得られた。□

[5] 多項式の最高次の係数が 1 であるものをモニックな多項式という。
[6] 加法における逆元を作用させること。日本の数学教育特有の表現。

解の公式の証明を紹介したが，2 次方程式の仮定，特に係数の条件について全く触れていない。中等教育前期における 2 次方程式の扱いを考察することで，仮定を明示する。中等教育前期に扱われる教科書の計算問題について，最高次の係数 a は正のものがほとんどである。実際，澤田利夫・坂井裕他 (2014) では，負になっているものが 1 問のみ見つけられたが，他の問題が全て最高次の係数で両辺が割り切れる方程式とともに出題されている。この出題から

$$-x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 10 = 0$$

のように変形することが方程式の解を求めるための前段階であることを示唆している。つまり，最高次の係数が負であるとき，両辺に -1 を掛け，最高次の係数は必ず正に変形し，

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は，$a > 0$ のみ扱う。よって，条件 $a > 0$ が仮定であることがわかる。$a > 0$ であれば，先程の解の公式の証明に論理ギャップは存在しない。

この最高次の係数を正と仮定することで、解の公式を適用し、解を求める過程において、分母が負になることを避けられる。中等教育前期において、分母・分子のそれぞれ数を個別に扱うことを避ける傾向にあるのは、繁分数を扱わないことから推察される。しかし、分母の有理化を扱う点を考慮すれば、あえて繁分数を避ける必要はない。

3. 中等教育後期における 2 次方程式の計算

中等教育後期では，科目「数学 I」で，2 次方程式の解の公式を証明する。中等教育前期と違い，2 次方程式の最高次の係数 a について，仮定は存在しない。通常，解の公式の一部

$$b^2 - 4ac$$

を判別式という。判別式は，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸との共有点の個数の判別などに使用される。その際，a の符号は正とは限らない。つまり，2 次方程式の最高次の係数 a が負であったとしても，解の公式に符号を正に変換することなく代入することが想定されている。

3-1 平方根の扱い

平方根の定義は，中等教育前後期ともに同じである。k を正の実数とし，$x^2 = k$ を満たす正の実数を $\sqrt{k}$ と書き，$x^2 = k$ を満たす負の実数を $-\sqrt{k}$ と書く。平方根の計算として h を実数として，

$$\sqrt{h^2} = |h| \tag{1}$$

が示されている。右辺は絶対値であり

$$\begin{aligned}|h| &= \begin{cases} h & h \geq 0 \\ -h & h < 0 \end{cases} \\ &= \mathrm{sgn}(h)h\end{aligned}$$

と定義する。ここで，$\mathrm{sgn}(h)$ は符号関数であり

$$\mathrm{sgn}(h) = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ 0 & h = 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

と定義する。

3-2 記載されている解の公式の証明

「数学 I」の教科書における証明は，2-1 で紹介したものと同じである。しかし，教授指

導書には，記載の違いがある。東京書籍株式会社 (2017) では次の証明を紹介している。見やすくするために，記述を変えている部分がある。

証明. 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の両辺に $4a$ を掛ける。

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

ここで，$X=2ax$ とおく。[7)]

$$X^2+2bX+4ac=0$$

平方完成し，定数項を左辺に移項する。

$$(X+b)^2=b^2-4ac$$

よって，$X+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ となり，b を移項し $X=2ax$ を代入することで

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

が得られる。□

この証明には論理ギャップは存在しない。高橋陽一郎他 (2017) には，「厳密な証明」として次が紹介されている。証明は，2-1 で紹介した証明と途中までは同様であるので，証明の異なる部分までは省略する。

証明. 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を変形し

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ここで，(1) より

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|} \\ &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

よって，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

が得られる。□

「厳密」な部分は，平方根の変形について絶対値が使用されていることである。この絶対値の取扱に注意しなければ論理ギャップが生まれる。
次の変形は，論理ギャップが存在する。

$$\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

絶対値の変形を等号で結んでいるが，左辺と右辺では $a<0$ であれば複号同順ではない。

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|} \\ &= \begin{cases} \pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & a>0 \\ \mp\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & a<0 \end{cases} \end{aligned}$$

と書かなければ複号同順にならない。これを変形すると

$$x=\begin{cases} \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & a>0 \\ \dfrac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & a<0 \end{cases}$$

このことから，a の正負にかかわらず，得られる 2 つの値に変化はない。よって，結果として

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

として構わない。次の章で，結果として a の符号にかかわらず同じ公式が得られることを示す。

7) ここの置換は記載されていない。

3-3 論理ギャップのない考え方

解の公式の表現

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

における等号は，厳密には実数上の等号ではない。なぜなら ± は

$$+ \text{ または } -$$

と論理和が含まれているためである。よって，「a の符号にかかわらず同じ公式」は，「集合として等しい」である。
「集合として等しい」ことを確認するために，写像を用いて考察する。まずは，代数学の基本定理を写像を用いて書き表す。

定義 1　複素係 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を $x = \alpha, \beta$ とする。このとき，写像 S を

$$\begin{array}{cccc} S: & \mathbb{C}^{\times 8)} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ & \Psi & & \Psi \\ & (a, b, c) & \mapsto & (\alpha, \beta) \end{array}$$

とする。

写像 S は，2 次方程式に対する代数学の基本定理を表している。[9] 中等教育前期においては，実数係数しか扱わないため，定義域は，$\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に制限する必要がある。しかし，代数方程式の性質上複素数解が存在するため，やむを得ず「解なし」が存在する。これは，「写像 S の像に，別の制限を加える」ことになる。具体的には，像と $\mathbb{R}^2$ との共通部分を考えるとよい。中等教育後期においては，前期と同様実数係数が大半であるが，複素数解を扱うので，特段の制限はない。よって，中等教育前期の 2 次方程式の内容は，数学の構造として歪であることがわかる。[10]
写像 S は代数学の基本定理をよく表しているが，解の公式の証明においては，次の関数を導入することで，猥雑さを避けることができる。

定義 2　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して，関数 $F : \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \to \mathbb{C}$ を

$$F(a, b, c, k) = \frac{-b + \mathrm{sgn}(ak)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

とおく。

$F(\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times)$ は，解の公式を用いて得られる集合と一致する。[11] 中等教育前期においては，最高次の係数が 1 が前提であるので，制限写像 $F|_{\{1\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times}$ の像を考えればよい。制限写像の像を J とおき，$J \cap \mathbb{R} = \emptyset$ を「解なし」と位置づければよい。

4. 最後に

中等教育前後期において扱われる数体系には差があり、さらに方程式に対する明示されていない仮定のため、解の公式を導く過程が、中等教育前後期で同様であっても、その裏にある論理は別であることを確認した。しかし、数学の体系とは別に教育内容が構成されているため、中等教育で扱われる方程式が持つ構造は歪である。方程式と解が構成する構造について、写像を構成することで，中等教育に表れる体系の歪さや論理ギャップを抽象的に考察することを可能にした。「方程式の解が存在する」ことと「存在する方程式の解を求めること」の違いも，代数学の基本定理を表す

8) 単元集合。$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ のこと。
9) 定義域の第一成分が $\mathbb{C}$ であるから，第二成分・第三成分を第一成分で割り，射影空間の直積集合としてもよい。
10) 中等教育後期においては，「数 III」で複素数係数の方程式を扱う。その意味で「数 I」のみでは，数学の構造として，整理されていないことがわかる。
11) 符号関数 $\mathrm{sgn} : \mathbb{R}^\times \to \{-1, 1\}$ は，群準同型写像。

写像と解の公式を表す関数を構成することで表すことができた。

謝辞

本稿を作成するにあたり助言頂いた，松井伸也教授に深謝いたします。

参考文献

高橋陽一郎他 2017. 『解説書 詳説数学 I -改訂版-』，新興出版社啓林館.
東京書籍株式会社 2017. 『数学 I Advanced 指導書』，東京書籍.
澤田利夫・坂井裕他 2014. 『中学数学 3』，教育出版.